Modelos de Probabilidade e Inferência Estatística

Ulisses U. dos Anjos

Departamento de Estatística
Universidade Federal da Paraíba

Período 2016

Sumário

Objetivos

Revisar, aprofundar e ampliar os conceitos de probabilidade e inferência estatística dos mestrandos, visando sua utilização nas dissertações e servindo como base para outras disciplinas do programa.

Bibliografia

- DANIEL, w. w. Biostatics: A Foundation for Analysis in the Health Sciences. 9º Ed.. Wiley, 2009.
- TRIOLA, M. F. Introdução à Estatística. Livros Técnicos e Científicos Editora, 2005.
- ARANGO, H. G. Bioestatística: teórica e computacional. 2ª edição. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2005.
- PEGANO, M., GAUVREAU, K. Princípios de Bioestatística. Tradução Luiz Sérgio de Castro Paiva. 2ª edição. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

Objetivo da Probabilidade

- Fornecer o arcabouço teórico para o estudo dos fenômenos ou experimentos aleatórios.
- Criar modelos teóricos que reproduzam de maneira razoável a distribuição de freqüências dos fenômenos ou experimentos aleatórios. Tais modelos são chamados modelos probabilísticos.

Experimento aleatório

- **Definição:** Um experimento que pode fornecer diferentes resultados, muito embora seja repetido toda vez da mesma maneira, é chamado **experimento aleatório**.
- **Característica de um experimento aleatório:** Imprevisibilidade: o resultado do experimento não pode ser conhecido a priori, mesmo se repetido sobre iguais condições;

Espaço amostral e evento

- **Espaço amostral:** é o conjunto de todos os resutados de um experimento aleatório. Notação: Ω
- **Evento:** É um subconjunto do espaço amostral;
- Os subconjuntos de Ω serão denotados por letras latinas maiúsculas (A,B,C,...);
- Diz-se que "“ocorre o evento A"” quando o resultado do experimento aleatório for um elemento de A;
- O espaço amostral Ω e o conjunto vazio $\varnothing$ também são eventos, em que Ω é o evento certo e $\varnothing$ é o evento impossível.

Operações básicas entre conjuntos

- $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \text{ ou } \omega \in A, \omega \in B\}$, é a união de A e B;

Exemplo

Suponha que iremos sortear de uma lista de casais que se casaram há 30 anos atrás e verificar quais deles estão vivos. Considere os seguintes eventos: $A =$A mulher estar viva e $B =$O homem estar vivo. Então o evento pelo menos um estar vivo é dado por $A \cup B$

Operações básicas entre conjuntos

- $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B\}$, é a intersecção de A e B;

Exemplo

Considerando o exemplo anterior, então o evento ambos estarem vivos é dado por $A \cap B$.

Operações básicas entre conjuntos

- $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$, deste modo segue que $A^c = \Omega - A$ é o complementar de A, do mesmo modo $B^c = \Omega - B$ é o complementar de B;

Exemplo

Considerando o exemplo anterior, então o evento o homem estar vivo pode ser representado por A^c, logo nesse caso específico $B = A^c$ e $A = B^c$.

- $A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \notin B\}$, deste modo segue que $A - B = A \cap B^c$ é a diferença entre A e B;

Exemplo

Operações básicas entre conjuntos

- $A \Delta B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \notin B$ ou $\omega \notin A, \omega \in B\}$, deste modo segue que $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ é a diferença simétrica entre A e B;

Exemplo

Considerando o exemplo anterior, então o evento somente o homem ou a mulher estar vivo pode ser representado por $A \Delta B$.

- A e B são disjuntos(mutuamente exclusivos) se e somente se $A \cap B = \varnothing$;

Exemplo

Considerando o exemplo anterior, então os eventos A e B não

Partição de um evento

- Seja A um subconjunto de Ω. Então $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição de A se e somente se $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$ e $\cup_{i=1}^{n} A_i = A$.
- Deste modo, se $A = \Omega$ então $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição de Ω se e somente se $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$ e $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Leis de De Morgan

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ tal que $A_i \subset \Omega$ para todo i, então:

(i) $\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$.
Interpretação: o complementar da ocorrência de pelo menos um dos eventos é a não ocorrência de todos os eventos;

(ii) $\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$.
Interpretação: o complementar da ocorrência de todos os eventos é a não ocorrência de pelo menos um dos eventos.

Função indicadora

Seja $A \subset \Omega$, então

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

σ-Álgebra

Uma classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é denominada uma σ-álgebra se ela satisfaz:

(F1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(F2) Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$;

(F3) Se $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \geq 1$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;

Definição Clássica

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço finito de eventos equiprováveis. Assim, para todo $A \in \mathcal{F}$ tem-se que,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

em que $\#$ é o número de elementos do conjunto.

Exemplo

Considere o experimento aleatório de lançar duas moedas. Nesse caso o espaço amostral é dado por $\Omega = \{(c,c),(c,r),(r,c),(r,r)\}$. *Seja A=Obtenção de faces iguais. Portanto,* $A = \{(c,c),(r,r)\}$. *Deste modo,*

Definição frequentista

Seja Ω um espaço amostral de um experimento aleatório. Seja n repetições independentes de um experimento aleatório e n_A o número de ocorrências do evento $A \subset \Omega$. Então, a probabilidade de A é dada por,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = p$$

Observação

A lei dos grandes números garante a convergência sobre certas condições do limite acima, em que $0 \leq p \leq 1$.

Definição axiomática

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Então uma função $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ é uma probabilidade se,

(P1) $P(\Omega) = 1$;

(P2) Para todo $A \in \mathcal{F}$ tem-se $P(A) \geq 0$;

(P3) P é σ-aditiva, isto é, se $A_1, A_2, \ldots,$ são dois a dois disjuntos então,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

em que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$.

Observação

Propriedades de uma medida de probabilidade

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, então para todo $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$, tem-se que:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- $P(\varnothing) = 0$;
- P é uma função não decrescente, isto é, para todo $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subseteq B$ tem-se que $P(A) \leq P(B)$;
- Para todo $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subseteq B$ tem-se que $P(B - A) = P(B) - P(A)$;
- Para todo $A, B \in \mathcal{F}$ arbitrários tem-se que:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \text{ e } P(B - A) = P(B) - P(A \cap B).$$

Propriedades de uma medida de probabilidade

- Para todo $A \in \mathcal{F}$ tem-se que $0 \leq P(A) \leq 1$;
- Para todo $A, B \in \mathcal{F}$ arbitrários tem-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

ARANGO, Exemplo 5.5, P. 144

Considere os dados abaixo que mostram 15 indivíduos classificados quanto às variáveis obesidade e sedentarismo.

Indivíduo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Obesidade	n	n	s	n	s	s	n	n	n	s
Sedentarismo	s	n	s	s	n	s	n	s	s	s

Indivíduo	11	12	13	14	15
Obesidade	n	n	s	n	n
Sedentarismo	n	n	s	n	s

ARANGO, Exemplo 5.5, P. 144

Considere os seguintes eventos: A=indivíduo obeso e B= indivíduo sedentário. Supondo que essa amostra e representativa da população de estudo, calcule(estime) a probabilidade de:

- O indivíduo ser obeso;**Tabela**
- O indivíduo ser sedentário;**Tabela**
- O indivíduo ser obeso e sedentário;**Tabela**
- O indivíduo ser obeso ou sedentário;**Tabela**
- O indivíduo não ser obeso e nem sedentário;**Tabela**

Probabilidade Condicional

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o espaço de probabilidade para um determinado experimento aleatório. Suponha que tenhamos a priori alguma informação a respeito do resultado do experimento aleatório. No exemplo anterior, suponha que um indivíduo é sorteado aleatoriamente e que recebemos a informação que o indívíduo é obeso. Nessas condições qual a probabilidade do indívíduo ser sedentário? **Tabela**

Probabilidade Condicional

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Seja $B \in \mathcal{F}$ um evento tal que $P(B) > 0$. Então a probabilidade condicional, dado o evento B, é uma função denotada por $P(.|B)$ e definida para todo $A \in \mathcal{F}$ como segue,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

em que $P(A|B)$ é chamada a probabilidade condicional de A dado B.

Regra do Produto

Sejam A e B eventos em $\mathcal{F}$ tal que,

$$P(A) > 0 \text{ e } P(B) > 0$$

então,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Exemplo

Considerando o Exemplo 5.5, ARANGO, calcule a probabilidade do indivíduo ser obeso e sedentário utilizando a regra do produto. ***Tabela***

Probabilidade Total

Sejam $\{A_i, i = 1, \ldots, n\}$ uma partição de Ω com $P(A_i) > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Então, para todo $B \in \mathcal{F}$ tem-se que,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

Exemplo

Considerando o Exemplo 5.5, ARANGO, calcule a probabilidade do $B =$indivíduo ser obeso, considerando a partição $A =$o indivíduo é sedentário e $A^c =$o indivíduo não é sedentário. ***Tabela***

Teorema de Bayes

Seja $\{A_i, i = 1, \ldots, n\}$ uma partição de Ω com $P(A_i) > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Então, para todo $B \in \mathcal{F}$ para o qual $P(B) > 0$ tem-se que,

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Exemplo

Considerando o Exemplo 5.5, ARANGO, calcule a probabilidade do indivíduo não ser sedentário dado que $B =$indivíduo é obeso, considerando a partição $A =$o indivíduo é sedentário e $A^c =$o indivíduo não é sedentário. ***Tabela***

Testes Diagnósticos

- São testes que tem como objetivo identificar um evento de interesse.
- Medidas para avaliar um teste: Sensibilidade(s), Especificidade(e), Valor Preditivo Positivo(VPP), Valor Preditivo Negativo(VPN), Falso Positivo(FP) e Falso Negativo(FN).

Avaliação do Teste

		Resultado do Teste	
		Positivo	Negativo
Ocorrência do Evento	Sim	a	b
	Não	c	d

Consideremos os seguintes eventos:

D_{+}=Ocorrência do evento de interesse;

D_{-}=Não ocorrência do evento de interesse;

T_{+}=Teste positivo;

T_{-}=Teste negativo;

Sensibilidade e Especificidade

- Sensibilidade(s): é a probabilidade do teste dar positivo dado que ocorreu o evento de interesse, isto é,

$$s = P(T_+|D_+) = \frac{P(T_+ \cap D_+)}{P(D_+)} = \frac{a}{a+b}$$

- Especificidade(e): é a probabilidade do teste dar negativo dado que não ocorreu o evento de interesse, isto é,

$$s = P(T_-|D_-) = \frac{P(T_- \cap D_-)}{P(D_-)} = \frac{d}{c+d}$$

Sensibilidade e Especificidade

- Valor Preditivo Positivo(VPP): é a probabilidade do evento de interesse ocorrer dado que o teste deu positivo, isto é,

$$VPP = P(D_+|T_+) = \frac{P(T_+ \cap D_+)}{P(T_+)} = \frac{p \times s}{p \times s + (1-p) \times (1-e)}$$

em que $p = P(D_+)$ é a prevalência do evento de interesse;

- Valor Preditivo Negativo(VPN): é a probabilidade do evento de interesse não ocorrer dado que o teste deu negativo, isto é,

$$VPN = P(D_-|T_-) = \frac{P(T_- \cap D_-)}{P(T_-)} = \frac{(1-p) \times e}{p \times (1-s) + (1-p) \times e}$$

Exemplo 3.5.1 - Livro Daniel

Uma equipe de pesquisa médica quis avaliar uma proposta de teste de triagem para mal de Alzheimer. O teste foi aplicado a uma amostra aleatória de 450 pacientes com a doença de Alzheimer e uma amostra aleatória independente de 500 pacientes sem os sintomas da doença. As duas amostras foram retiradas de populações de indivíduos com 65 anos de idade ou mais. Os resultados são apresentados a seguir:

		Resultado do Teste	
		Positivo	Negativo
Mal de Alzheimer	Presente	436	14
	Ausente	5	495