Probabilidade IV

Ulisses U. dos Anjos

Departamento de Estatística
Universidade Federal da Paraíba

Período 2015.2

Sumário

Conteúdo Programático

1. Revisão básica de sequências e séries. Limites de sequências e sequências convergentes. Valores de aderência. liminf e limsup de uma sequência de números reais. Sequências especiais: Cauchy.
2. Convergência de séries. Critérios de convergência de séries numéricas.
3. Convergência de Variáveis Aleatórias: Conceitos inicias, desigualdades, Sequências de eventos. Liminf e limsup de uma sequências de eventos; lemas de Borel-Cantelli.
4. Modos de convergência: convergência quase certa, convergência em probabilidade, convergência em média r ou L^p e convergência em distribuição;
5. Introdução à Lei dos grandes números e exemplos

Conteúdo Programático

6. Lei fraca dos grandes números. Lei forte de Kolmogorov e sua recíproca.
7. Funções características. Propriedades de funções características. Definição de convergência em distribuição. Funções características e convergência em distribuição. Teoremas de Slutsky.
8. Funções características de vetores aleatórios e Função geratriz de momentos de vetores aleatórios.
9. Teorema central do limite para sequências i.i.d.
10. Teorema central do limite de Lindeberg e Teorema central do limite de Liapunov.

Desigualdade I - Desigualdade de Bernoulli

Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Demonstração.

1. Fazendo a prova por inducão tem-se que para $n = 1$ é válida a desigualdade visto que nese caso teremos uma igualdade,$(1+x) = 1+x$;
2. Supondo válida a desigualdade para n, consideremos agora se vale para $n+1$. De fato,

$$\begin{aligned}
(1+x)(1+x)^n &\geq (1+x)(1+nx) \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1+nx+x+nx^2 \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x
\end{aligned}$$

Desigualdade II

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ então,

$$|x+y| \leq |x| + |y| \text{ e } |xy| = |x||y|.$$

Demonstração.

1. somando membro a membro as desigualdade $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$, tem-se que
$$|x| + |y| \geq x + y \tag{1}$$
2. Analogamente, de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$, tem-se que
$$|x| + |y| \geq -(x+y) \tag{2}$$
3. Logo, das equações acima conclui-se que $|x| + |y| \geq |x+y|$.

$\square$

Desigualdade II

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ então,

$$|x+y| \leq |x| + |y| \text{ e } |xy| = |x||y|.$$

Demonstração.

1. Para mostrar que $|xy| = |x||y|$ é válido, basta verificar que ambos possuem o mesmo quadrado. De fato,
2. $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2$
3. Do mesmo modo, $(|x||y|)^2 = |x|^2|y|^2 = x^2y^2$.

$\square$

Sequência

Uma sequência de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real $f(n) = x_n$ chamado o n-ésimo termo da sequência. **Notação:** $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemplo 2.1

1. $(2, 4, 6, \ldots, x_n, \ldots)$ *sequência de números pares com termo geral* $x_n = 2n$*;*
2. $(3, 5, 7, \ldots, x_n, \ldots)$ *sequência dos números ímpares, com termo geral* $x_n = 2n + 1$*;*
3. $(0, -1, 1, -1, 1, \ldots, x_n, \ldots)$ *sequência com termo geral* $x_n = (-1)^{n-1}$.

Sequência limitada

1. **Sequência limitada Superiormente:** Diz-se que uma Sequência é limitada superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. c nesse caso é uma cota superior;
2. **Sequência limitada Inferiormente:** Diz-se que uma Sequência é limitada inferiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. c nesse caso é uma cota inferior;
3. **Sequência limitada:** Diz-se que uma Sequência é limitada quando ela é limitada inferiormente e superiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$.

Exemplo

Exemplo 2.2

Seja $a > 1$, então a sequência $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ é limitada inferiormente porém não superiormente.

1. *De fato, multiplicando ambos os lados da desigualdade $a > 1$ por a^n tem-se $a^{n+1} > a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*
2. *Agora note que $a^2 > a$, $a^3 > a^2$, ...,$a^{n+1} > a^n$, portanto, $a^n \geq a$ para todo $n \in \mathfrak{N}$. Logo, $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ é limitada inferiormente por a;*
3. *Por outro lado, como $a > 1$, temos $a = 1 + d$, com $d > 0$. Assim, pela desigualdade de Bernoulli temos que $a^n = (1 + d)^n > 1 + nd$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Portanto, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$ podemos obter $a^n > c$ desde que tomemos $1 + nd > c$, isto é, $n > \frac{c-1}{d}$. Deste modo, para a sequência $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$, não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a^n \leq c$. Logo, $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ não é limitada superiormente.*

Supremo de um Conjunto

Chama-se supremo de um conjunto C à menor de suas cotas superiores. Chama-se de supremo de um conjunto C ao número S que satisfaz as duas condições seguintes:

1. $c \leq S$ para todo $c \in C$;
2. dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ tal que $c \geq S - \epsilon$.
3. **Teorema:** Todo conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente, possui supremo.

Ínfimo de um Conjunto

Chama-se ínfimo de um conjunto C à maior de suas cotas inferiores.
Chama-se de ínfimo de um conjunto C ao número s que satisfaz as duas condições seguintes:

1. $c \geq s$ para todo $c \in C$;
2. dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ tal que $c \leq s + \epsilon$.
3. **Teorema:** Todo conjunto não vazio de números reais, limitado inferiormente, possui ínfimo.

Definição de Convergência

Diz-se que uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o número L, ou tem limite L se, dado qualquer $\epsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que,

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Notação: Escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ou simplesmente $a_n \longrightarrow L$.

Observação 2.1

Uma sequência que não converge é dita divergente.

Observação 2.2

Chama-se sequência nula toda sequência que converge para zero.

Definição de Vizinhança

Dado um número L qualquer, chama-se vizinhança ϵ de L a todos so números x do intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$. Denotaremos esse intervalo com o símbolo $V_\epsilon(L)$.

Observação 2.3

Note que a condição $x \in V_\epsilon(L)$, isto é, x pertencer a vizinhança ϵ de L, pode ser escrita das seguintes três maneiras:

1. $|x - L| < \epsilon$;
2. $-\epsilon < x - L < \epsilon$;
3. $L - \epsilon < x < L + \epsilon$.

Assim, ao dizermos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, estamos dizendo que para $n > N \Rightarrow a_n \in V_\epsilon(L)$, ou seja,$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$, ou $n > N \Rightarrow -\epsilon < a_n - L < \epsilon$, ou ainda $n > N \Rightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$.

Sequências Monótonas

1. Diz-se que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente se,
$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots ;$$
2. e decrescente se,
$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots ;$$
3. Diz-se que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não decrescente se,
$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots ;$$
4. e não crescente se,
$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots ;$$
5. Diz-se que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona se ela satisfaz qualquer umas das condições (1) a (4).

Teorema - Sequências Monótonas

Toda sequência **monótona** e **limitada** é convergente.

Demonstração.

Idéia da prova: utilizar o conceito de supremo junto com o conceito de sequência limitada para mostrar que numa sequência monótona não decrescente o limite é o supremo S. De modo análogo, utilizando o conceito de infimo junto com o conceito de sequência limitada para mostrar que numa sequência monótona não crescente o limite é o infimo s. Consideremos primeiramente uma sequência monótona não decrescente e limitada. Deste modo, por ser uma sequência monótona não decrescente ela é limitada inferiormente por a_1, e visto que é limitada, então é limitada superiormente, e portanto possui um supremo S. Vamos provar que S é o limite de (a_n). De fato, $\epsilon > 0$, existe um elemento da sequencia, com um certo índice N, tal que,

$$S - \epsilon < a_N < S + \epsilon.$$

Limsup e Liminf

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica. Considere agora as seguintes sequências: $a_n = \sup\limits_{m\geq n}(x_m)$ e $b_n = \inf\limits_{m\geq n}(x_m)$.
A partir dessas definições, perceba que à medida que n aumenta o supremo e o infimo são calculados sobre conjuntos de menor tamanho, portanto,

$$a_1 \geq a_2 \ldots \geq a_n \geq \ldots, \text{ e } b_1 \leq b_2 \ldots \leq b_n \leq \ldots,$$

Portanto, a_n é uma sequência monótona não decrescente e b_n é uma sequência monótona não crescente;
Nestas condições segue que,

$$\lim a_n = \inf_{n\geq 1} a_n \text{ e } \lim b_n = \sup_{n\geq 1} b_n$$

os quais sempre existem, vide teorema do ínfimo e supremo.
Deste modo,

$$a = \lim a_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n}(x_m) \text{ e } b = \lim b_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{m\geq n}(x_m)$$

Teorema

Teorema 2.1 (Teorema 5. p.26, LIMA, E. L.)

Seja $a = \lim a_n$. Se $a > b$ então para todo n suficientemente grande, tem-se $a_n > b$. Analogamente, se $a < b$ então para todo n suficientemente grande, tem-se $a_n < b$.

Demonstração.

Idéia da prova: utilizar a definição de convergência e vizinhança. De fato, tomando $\epsilon = a - b$, temos que $\epsilon > 0$ e $b = a - \epsilon$. Pela definição de convergência e vizinhança, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ tem-se que $a_n \in V_\epsilon(s)$, portanto

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

Logo, $a_n > a - \epsilon = b$.
Exercício:*Prova que se $a < b$ então para todo n suficientemente grande, tem-se $a_n < b$.* □

Corolários

Corolário 2.1 (Corolário 1. p.26,LIMA, E. L.)

Seja $a = \lim a_n$. *Se* $a > 0$ *então para todo* n *suficientemente grande, tem-se* $a_n > 0$. *Analogamente, se* $a < 0$ *então para todo* n *suficientemente grande, tem-se* $a_n < 0$.

Corolário 2.2 (Corolário 2. p.26,LIMA, E. L.)

Sejam $a = \lim a_n$ *e* $b = \lim b_n$. *Se* $a_n \leq b_n$ *para todo* n *sufucientemente grande então* $a < b$. *Em particular se* $a_n \leq b$ *para* n *suficientemente grande, então* $lim a_n \leq b$.

Teorema 2.2 (Teorema do Sanduíche. p.27, LIMA, E. L.)

Se $\lim a_n = \lim b_n = a$ *e* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para todo* n *suficientemente grande, então* $\lim c_n = a$.

Definições

Definição 2.1 (Subsequência)

Uma subsequência de uma dada sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma restrição de* (a_n) *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}^{'}$ *de* $\mathbb{N}$.
Notação: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}'}$

Definição 2.2 (Pontos Aderentes)

Diz-se que L *é um ponto de aderência de uma dada sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se uma subsequencia que converge para* L.

Teoremas

Teorema 2.3 (Exercicio 2. p.99, Avila, G.)

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada que não converge. Então (a_n) possui pelo menos dois pontos aderentes, $\liminf a_n$ seu menor valor de aderência e $\limsup a_n$ seu maior valor de aderência.

Teorema 2.4 (Exercicio 1. p.99, Avila, G.)

Uma sequência limitada converge para L se e somente se L é seu único ponto de aderência. Logo, $L = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Teoremas

Teorema 2.5 (Teorema 7. p.27, LIMA, L. L.)

Se $\lim a_n = 0$ *e* b_n *é uma sequencia limitada, convergente ou não, então* $\lim a_n b_n = 0$.

Exemplo 2.3

Seja $a_n = \frac{1}{n}$ *e* $b_n = sen(n)$ *então* $\lim a_n = 0$ *e* $-1 \leq b_n \leq 1$, *logo do teorema anterior segue que,* $\lim a_n b_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{sen(n)}{n} = 0$.

Teorema 2.6

Se $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ *então:*

(i) $\lim(a_n \pm b_m) = a \pm b$;

(ii) $\lim(a_n b_m) = ab$;

(iii) $\lim\left(\frac{a_n}{b_m}\right) = \frac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$.

Critério de Convergência de Cauchy

Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente é que, dado $\epsilon > 0$, existe N tal que,

$$n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

Observações, p.31, LIMA, E. L.

(i) Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diz-se que "o limite de a_n é mais infinito"e escreve-se $\lim x_n = +\infty$, para significar que, dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $a_n > A$.

(ii) Analogamente,$\lim a_n = -\infty$, significa que, para todo $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $a_n < -A$.

(iii) É importante ressaltar que $+\infty$ e $-\infty$ não são números e que se $\lim a_n = +\infty$ ou $\lim a_n = -\infty$ a sequencia não é convergente.

Definição

Dada uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, podemos formar uma nova sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n.$$

Em que s_n é denominada as reduzidas ou somas parciais da série $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e a parcela a_n é o n-ésimo termo ou termo geral da série.
Se o limite $s = lim_{n\to\infty} s_n$ existir, diremos que a serie é convergente e $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será chamada a soma da serie.
Se $s = lim_{n\to\infty} s_n$ não existir, diremos que a serie s é divergente.

Observação 3.1

Às vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, que começam com a_0 em vez de a_1.

Exemplos

Exemplo 3.1

Seja $a_n = a^n$, *com* $0 < a < 1$, *então as somas parciais* (s_n) *da série* s *é dada por,*

$$s_n = \sum_{n=0}^{n} a^n = 1 + a + \ldots a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

logo,

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$$

portanto s_n *é uma série convergente.*

Exemplo 3.2

Seja $a_n = (-1)^{n+1}$, *então as somas parciais* (s_n) *da série* s *é dada por,*

$$s_n = \sum^{n} a^n = 1 + a + \ldots a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ for par} \\ 1 & \ldots \end{cases}$$

Propriedade

Teorema 3.1

Se uma série é convergente então seu termo geral tende para zero.

Observação 3.2

A propriedade contida nesse teorema deve ser a primeira verificação a ser feita, pois se o termo geral não tender a zero a série será divergente. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, isto é, se o termo geral tender a zero, isto não implica que a série será convergente, exemplo disso, é a série harmônica cujo termo geral é $a_n = 1/n$*. Logo, a condição é necessária mas não suficiente.*

Critério da Comparação

Teorema 3.2 (Versão 1: p.114, AVILA, G.)

Sejam $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries de termos não negativos, a primeira dominada pela segunda, isto é,* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Nessas condições:*

(i) t *converge implica que* s *converge e* $s \leq t$;

(ii) t *diverge implica que* s *diverge.*

Teorema 3.3 (Versão 2 :p.38, LIMA, E. L.)

Sejam $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries de termos não negativos. Se existirem* $c > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $a_n \leq cb_n$ *para todo* $n > n_0$ *então a convergência de* t *implica a convergência de* s *e a divergência de* t *implica a divergência de* s.

Séries Absolutamente Convergentes

Uma série $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se absolutamente convergente quando $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Observação 3.3

Note que é condição é suficiente, mas não necessária. Por exemplo, a série cujo termo geral é $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *é convergente, entretanto,* $|a_n| = \frac{1}{n}$ *é divergente.*

Critério de Convergência de Cauchy

Uma condição necessária e suficiente para que uma série $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente é que dado qualquer $\epsilon > 0$, exista $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo inteiro positivo p,

$$n > N \;\Rightarrow\; |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$$

Observação 3.4

Note que este teorema é uma simples adaptação do teorema análogo para sequências.

Teste da razão

Teorema 3.4

Seja $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos tal que* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Então, a série converge se* $L < 1$ *e diverge se* $L > 1$, *sendo inconclusivo se* $L = 1$.

Corolário 3.1

A série de termos positivos será convergente se existir um $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > N$ *implicar* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c < 1$; *e divergente se* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

Conceitos Básicos

Diremos que uma sequência de eventos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não-decrescente se

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e denotaremos por $A_n \uparrow$. Da mesma forma, diremos que uma sequência de eventos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não-crescente se

$$A_n \supset A_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e denotaremos por $A_n \downarrow$.

Limite Superior - Limsup

O limite superior de uma sequência de eventos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por:

$$\limsup A_n = \overline{\lim}\, A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Isto significa que o $\limsup A_n$ é o conjunto dos elementos de Ω que pertencem a um número infinito dos A_n, por esta razão frequentemente denominamos o $\limsup A_n$ pelo conjunto,

$$\{A_n \text{ocorre infinita vezes}\}$$

Limite Inferior - Liminf

Do mesmo modo, definimos limite inferior por:

$$\liminf A_n = \underline{\lim}\, A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Isto significa que o $\liminf A_n$ é o conjunto dos elementos de Ω que estão em todos os A_n a partir de um certo n. Por essa razão, frequentemente denominamos o $\liminf$ pelo conjunto,

$$\{A_n \text{ ocorre para todo n suficientemente grande}\}$$

Se uma sequência de eventos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite, então,

$$\overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Teorema

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de eventos em Ω, então:

(i) $\omega \in \limsup A_n$ se, e somente se, $\omega \in A_n$ para um número infinito de índices;

(ii) $\omega \in \liminf A_n$ se, e somente se, $\omega \notin A_n$ para um número finito de índices;

Demonstração:

- Parte **(i)** Vamos primeiro provar que $\omega \in \limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k \implies \omega \in A_n$ para um número infinito de índices.
- De fato, seja $B_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$, então $B_n \supset B_{n+1}$ $\forall n \geq 1$, logo $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não crescente,
- portanto $\omega \in \limsup A_n \implies \omega \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n \implies \omega \in B_n$ para todo $n \geq 1$,
- mas isso implica que $\omega \in A_n$ para um número infinito de índices, pois caso contrário, suponha que $\omega \in A_n$ apenas para um número finito de índices,

Teorema

Demonstração:

- logo, seja m_n o maior desses índices, então $\omega \notin B_{m_n+1} = \cup_{k=m_n+1}^{\infty} A_k$.
- Nessas condições, segue que se $\omega \in B_n$ para todo $n \geq 1$ e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não crescente implica que existe uma subsequência $(A_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ para a qual $\omega \in A_{m_n}$ para todo $n \geq 1$.
- Reciprocamente, se existe uma subsequência $(A_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ para a qual $\omega \in A_{m_n}$ para todo $n \geq 1$ issso implica que $\omega \in B_n$ para todo $n \geq 1$ logo $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \limsup A_n$ $\square$

Teorema

Demonstração:

- Parte **(ii)**. Mostremos agora que se $\omega \in \liminf A_n$ então $\omega \notin A_n$ para um número finito de índices.
- De fato, seja $C_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k$, então $C_n \subset C_{n+1}$ $\forall n \geq 1$, logo $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não decrescente,
- portanto, $\omega \in \liminf A_n \implies \omega \in \cup_{n=1}^{\infty} C_n \implies \omega \in C_{n_0}$ para algum n_0
- isso implica que $\omega \in A_n$ para todo n suficientemente grande $n \geq n_0$.
- Logo, $\omega \notin A_n$ para um número finito de A_n.

Teorema

Demonstração:

- Mostremos agora que $\omega \notin A_n$ para um número finito de A_n implica $\omega \in \liminf A_n$
- De fato, se $\omega \notin A_n$ para um número finito de A_n então tomando n suficientemente grande $n > n_0$, implica que $\omega \in A_n$ para todo n, isso implica que $\omega \in C_{n_0} = \cap_{k=n_)}^{\infty} A_k$, logo $\omega \in \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ portanto $\omega \in \liminf A_n$. $\square$.

Propriedades do Limsup e do Liminf

(i) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. De fato, seja $B_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$ e $C_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k$, portanto $B_n \downarrow$ e $C_n \uparrow$ e $B_n \supset C_n$ para todo $n \geq 1$, portanto, para todo $n \geq 1$, tem-se que,

$$\cap_{i=1}^{n} B_i = B_n \text{ e } \cup_{i=1}^{n} C_i = C_n$$

logo,

$$\liminf A_n = \cup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \limsup A_n.$$

Propriedades do Limsup e do Liminf

(ii) $\left(\liminf A_n\right)^c = \limsup A_n^c$. De fato, pela Lei de Morganm tem-se que,

$$\left(\liminf A_n\right)^c = \left(\cup_{n=1}^{\infty} C_n\right)^c = \cap_{n=1}^{\infty} C_n^c = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \limsup A_n^c$$

(iii) Se $A_n \subset B_n$ para todo $n \geq 1$ então

$$\limsup A_n \subset \limsup B_n \text{ e } \liminf A_n \subset \liminf B_n$$

Propriedades do Limsup e do Liminf

(iv) $\left(\limsup A_n\right) \cup \left(\limsup B_n\right) = \limsup(A_n \cup B_n)$.

(v) $\left(\liminf A_n\right) \cap \left(\liminf B_n\right) = \liminf(A_n \cap B_n)$.

(vi) $\left(\limsup A_n\right) \cap \left(\limsup B_n\right) \supset \limsup(A_n \cup B_n)$.

(vii) $\left(\liminf A_n\right) \cup \left(\liminf B_n\right) \subset \liminf(A_n \cap B_n)$.

Teorema

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona de eventos, então:

- Se $A_n \uparrow$, então $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$;
- Se $A_n \downarrow$, então $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$

Demonstração:

- De fato, se $A_n \uparrow$, então

$$\liminf A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e

$$\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n$$

por outro lado,

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$$

logo,

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Teorema

- Considere agora que $A_n \downarrow$, então

$$\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

e

$$\liminf A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k \supseteq \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup A_n$$

por outro lado

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$$

logo,

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$