

Probabilidade II

Departamento de Estatística

Universidade Federal da Paraíba

Distribuição F de Snedecor

A distribuição F de Snedecor também conhecida como distribuição de Fisher é frequentemente utilizada na inferência estatística para análise da variância.

Definição 16.1: Uma variável aleatória contínua X tem distribuição F de Snedecor com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, denotada por F_{ν_1, ν_2} , se sua função densidade for dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} x^{\nu_1/2 - 1}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right) \left[\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)x + 1\right]^{(\nu_1 + \nu_2)/2}}, \quad 0 < x < \infty, \quad \nu_1, \nu_2 = 1, 2, 3, \dots$$

Novamente a expressão acima é assustadora????

Boa Notícia: Não precisaremos dela para calcular probabilidades.

Propriedades da distribuição F de Snedecor

Propriedades

$$E(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad \text{para } \nu_2 > 2$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 2)^2}, \quad \text{para } \nu_2 > 4$$

Não existe função geradora de momentos para a distribuição F de Snedecor.

Distribuição F de Snedecor

Principais Características

- Cada par de graus de liberdade da origem a uma distribuição F diferente.
- A distribuição F depende de dois parâmetros. O primeiro (ν_1) é o grau de liberdade do numerador e o segundo (ν_2) do denominador.
- A variável aleatória F é não-negativa, e a distribuição é assimétrica à direita.
- A distribuição F se parece com a distribuição qui-quadrado, no entanto, os parâmetros ν_1 e ν_2 fornecem flexibilidade extra em relação à forma.

Exemplo de Tabela F de Snedecor

O que é tabelado é a percentil 95% ou 99% - área à direita de cada curva (uma para cada par de valores - numerador, denominador) igual a 5% e 1%, isto é, "x" tal que $P[F(m, n) \geq x] = 5\%$ ou $P[F(m, n) \geq x] = 1\%$.

Tabela F – Probabilidades unilaterais à direita a 5%

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.90	244.69	245.36	245.95	246.47
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.97	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.11	4.08	4.06	4.04	4.02	4.00	3.99	3.92
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.69	3.66	3.64	3.62	3.60	3.58	3.51	3.49
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83

$P[F(5, 7) \geq 3.97] = 5\%$

Tabela F – Probabilidades unilaterais à direita a 1%

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6083.40	6106.68	6125.77	6143.00	6156.97	6170.01
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42	99.42	99.43	99.43	99.44
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.98	26.92	26.87	26.83
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37	14.31	14.25	14.20	14.15
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.70	10.50	10.34	10.21	10.10	10.00	9.96	9.89	9.82	9.77	9.68
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.48	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56	7.52
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31	6.28
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52	5.48
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01	4.96	4.92
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56	4.52

$P[F(5, 7) \geq 7.46] = 1\%$

Distribuição F de Snedecor

Teorema 16.1: Sejam Q_1 e Q_2 variáveis aleatórias independentes, com distribuição qui-quadrado com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, respectivamente. Então, a variável aleatória

$$F = \frac{Q_1/\nu_1}{Q_2/\nu_2}$$

tem distribuição F de Snedecor com ν_1 graus de liberdade no numerador e ν_2 graus de liberdade no denominador.

Distribuição F de Snedecor

Observação 16.1: Suponha que temos duas populações independentes tendo distribuições normais com variâncias iguais a σ^2 . Considere Y_{11}, \dots, Y_{1n} uma amostra aleatória da primeira população com n observações e Y_{21}, \dots, Y_{2m} uma amostra aleatória da segunda população com m observações. Então, a estatística

$$f = \frac{\frac{(n-1)S_1^2}{(n-1)\sigma^2}}{\frac{(m-1)S_2^2}{(m-1)\sigma^2}}$$

tem distribuição F de Snedecor com $(n-1)$ graus de liberdade no numerador e $(m-1)$ graus de liberdade no denominador, onde s_1 e s_2 são os desvios padrão amostrais da primeira e da segunda amostra, respectivamente.

Distribuição F de Snedecor

Observação 16.2: Em geral, as tabelas contêm apenas os pontos percentuais da cauda superior (valores de F_{α, v_1, v_2} para $\alpha \leq 0.50$)

Os pontos percentuais da cauda inferior $F_{1-\alpha, v_1, v_2}$ podem ser encontrados a partir da seguinte relação:

$$F_{1-\alpha, v_1, v_2} = \frac{1}{F_{\alpha, v_2, v_1}}$$

RELAÇÕES IMPORTANTES:

- $F_{1-\alpha, 1, v} = t_{1-\alpha/2, v}^2$
- $F_{\alpha, v, \infty} = \frac{\chi_{\alpha, v}^2}{v}$

Distribuição F de Snedecor

Exemplo 1: Determine

a) $F_{0.01,15,9}$

b) $F_{0.95,10,15}$

c) $F_{0.99,15,9}$

Distribuição F de Snedecor

Exemplo 2: Verifique que $F_{0.95} = t_{0.975}^2$.

Distribuição F de Snedecor