Probabilidade II

Departamento de Estatística

Universidade Federal da Paraíba

Distribuições condicionais

Em estudo feito em sala perguntamos aos alunos qual a religião deles e se eles estavam em algum relacionamento sério.

Suponha que tenhamos interesse em saber a probabilidade de um aluno está solteiro sabendo que ele é evangélico.

De forma semelhante, se X e Y representam as vidas úteis de dois componentes em um sistema e acontece de $X = 100$, qual é a probabilidade de $Y \geq 200$ e qual é a vida útil esperada do segundo componente condicional a esse valor de X.

Questões deste tipo são respondidas pelo estudo das distribuições condicionais

Distribuições condicionais

Para o caso discreto:

Definição 11.1: Dadas duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço amostral, a probabilidade condicional de $Y = y$, dado que $X = x$ ocorreu, é dada por

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}, \quad se \quad P(X = x) > 0.$$

Caso $P(X = x) = 0$, a probabilidade condicional pode ser definida arbitrariamente e adotaremos $P(Y = y|X = x) = P(Y = y)$.

Comentário: Para um dado j, $p(y_j|x_i)$ satisfaz a todas as condições de uma distribuição de probabilidade. Temos $p(y_j|x_i) \geq 0$ e também

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(y_j|x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} = \frac{p(x_i)}{p(x_i)} = 1$$

Distribuições condicionais

Exemplo 1: Vamos encontrar a probabilidade condicional, citada anteriormente, de um aluno estar solteiro sabendo que ele é evangélico.

Distribuições condicionais

Exemplo 2: A função de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias discretas X e Y é $p(x,y) = c(2x+y)$, onde x e y podem tomar os valores inteiros tais que $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 3$, sendo $p(x,y) = 0$ em todos os outros casos. Determine $p(y|2)$ e $P(Y = 1|X = 2)$.

Distribuições condicionais

Exemplo 2:

Distribuições condicionais

Definição 11.2: A esperança condicional da variável aleatória Y dada a variável aleatória X, que denotaremos por $E(Y|X)$, é dada por

$$E(Y|X=x)=\sum_{y} yP(Y=y|X=x).$$

$E(Y|x)$ é o valor esperado de Y, condicionado ao evento $[X=x]$.

Lema 11.1: Sejam X e Y variáveis aleatórias. Tem-se

$$E(E(Y|X))=E(Y).$$

Distribuições condicionais

Note que para cada valor de X, $X = x$, temos um valor de $E(Y|X = x)$. Ou seja, a esperança condicional de Y dado $X = x$ é uma função do valor x. Assim podemos considerar a variável aleatória $E(Y|X)$ que assume o valor $E(Y|x)$ quando $X = x$. Assim, $E(Y|X)$ é uma função de X.

Como $E(Y|X)$ é uma variável aleatória, faz sentido falar de seu valor esperado.

É importante compreender que o valor esperado interno é tomado em relação à distribuição condicional de Y para X igual a x, enquanto o valor esperado externo é tomado em relação à distribuição de probabilidade de X.

Distribuições condicionais

DEMONSTRAÇÃO

Distribuições condicionais

Resultado Útil: A esperança condicional da variável aleatória XY dada a variável aleatória X, que denotaremos por $E(XY|X)$, é dada por

$$E(XY|X=x) = E(xY|X=x) = xE(Y|X=x).$$

Assim,

$$E(XY|X) = XE(X|Y)$$

Usando o Lema 11.1, temos

$$E(XY) = E[XE(Y|X)].$$

Distribuições condicionais

Exemplo 3: Obtenha $E(Y|X=0)$, $E(Y|X=1)$ e $E(Y|X=2)$ para as variáveis do exemplo 2.

Distribuições condicionais

Exemplo 3:

Distribuições condicionais

Para o caso contínuo:

Definição 11.3: Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional, a densidade condicional de Y, dado $X = x$ denotada por $f(y|x)$ é dada para cada x fixo por

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0.$$

Comentário: As f.d.p condicionadas satisfazem a todas as condições de uma função densidade de probabilidade. Temos, para x fixo, $f(y|x) \geq 0$ e também

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy = \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1$$

Distribuições condicionais

Exemplo 4: A função densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é $f(x,y) = xe^{-x(y+1)}$, para $0 < x < \infty$ e $0 < xy < \infty$ e igual a zero no complementar. Determinar as densidades condicionais de $Y|X$ e de $X|Y$.

Distribuições condicionais

Exemplo 4 :

Distribuições condicionais

Exemplo 5: Seja $f(x,y) = 21x^2y^3$, para $0 < x < y < 1$ e $f(x,y) = 0$ no complementar. Determinar as densidades marginais e a densidade condicional de Y dado $X = x$.

Distribuições condicionais

Exemplo 5:

Distribuições condicionais

É possível calcular as probabilidades condicionais:

$$P(Y \leq y | x < X < x + \Delta x) = \int_{-\infty}^{y} f(y|x)dy$$

$$P(c < Y < d | x < X < x + \Delta x) = \int_{c}^{d} f(y|x)dy$$

Definição 11.4: Sejam X e Y variáveis contínuas com densidade conjunta $f(x,y)$. A esperança condicional da variável aleatória Y dada a variável aleatória X, que denotaremos por $E(Y|X)$, é dada por

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)dy.$$

Distribuições condicionais

Exemplo 6: Um banco opera tanto uma instalação de drive-through como em guichê de atendimento. Em um dia selecionado aleatoriamente, assuma $X =$ a proporção de tempo em que a instalação de drive-through está em uso (ao menos um cliente está sendo atendido ou esperando para ser atendido) e $Y =$ a proporção de tempo em que o guichê de atendimento está em uso. O conjunto de valores possíveis de (X, Y) é, então, o retângulo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Suponha que a fdp conjunta de (X, Y) seja dada por $f(x, y) = \frac{6}{5}(x + y^2)$, para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Obtenha: a densidade condicional de $Y|X = 0.8$, a probabilidade de o guichê de pessoas estar ocupado no máximo metade do tempo, dado que $X = 0.8$ e a esperança condicional de $Y|X = 0.8$.

Distribuições condicionais

Exemplo 6:

Distribuições condicionais

Exemplo 7: Um ponto Y é escolhido de acordo com um modelo Uniforme contínuo em $[0, 1]$. A seguir, um outro ponto X é escolhido, também segundo o modelo uniforme contínuo, mas, agora, no intervalo $[0, Y]$. Obtenha a esperança de X.