Distribuições de Bernoulli e Binomial

Modelos de Probabilidade e Inferência Estatística

Prof. Tarciana Liberal
Departamento de Estatística ï UFPB

Distribuição de Bernoulli

Na prática muitos experimentos admitem apenas dois resultados

Exemplo:

1. O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativa.
2. O aluno passa ou não em MPIE;
3. Um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
4. No lançamento de um dado ocorre ou não face 6;
5. No lançamento de uma moeda ocorre cara ou coroa.

Estas situações tem alternativas dicotômicas e podem ser representadas genericamente por resposta do tipo **sucesso-fracasso.** Associaremos p, a probabilidade de sucesso, ao evento que nos interessa e $1-p$, será a probabilidade de fracasso.

Esses experimentos recebem o nome de **Ensaios de Bernoulli** e originam uma V.A. com distribuição de Bernoulli.

Distribuição de Bernoulli

Uma V.A. (X) de Bernoulli é aquela que assume apenas dois valores **1** se ocorrer **sucesso** (S) e **0** se ocorrer **fracasso** (F), com probabilidade de sucesso **p**, isto é,

$$X = \begin{cases} 1, \text{ se ocorrer ñsucessoò} \\ 0, \text{ se ocorrer ñfracassoò} \end{cases}$$

E sua função de probabilidade é dada por:

x	0	1
P(X=x)	1-p	p

Notação: X~Bernoulli (p), indica que a v.a. X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro **p**

Se X~Bernoulli(p) pode-se mostrar que: E(X)=p e Var(X)=p(1-p).

Exemplo 1.

Suponha que a probabilidade de óbito de um paciente, ao dar entrada na terapia intensiva, seja de 25% (risco de morte). Seja X uma variável binária indicadora de óbito, se um paciente der entrada no CTI, obtenha a distribuição de probabilidade, a média e a variância.

Exemplo 1.

Exemplo 2: Suponha que uma moeda é lançada 3 vezes e a probabilidade de cara seja **p** em cada lançamento. Determinar a distribuição de probabilidade da variável X, número de caras nos 3 lançamentos.

Denotemos:

S: sucesso, ocorrer cara (k)

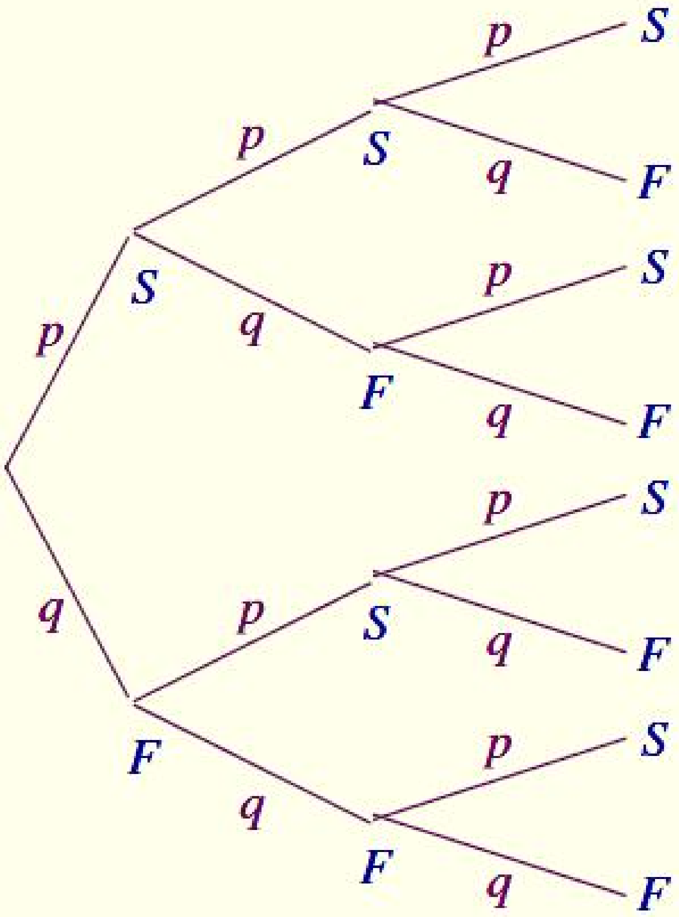
F:fracasso, ocorrer coroa(c)

P(sucesso)= P(fracasso)=

Ω={FFF.FFS, FSF,SFF,FSS, SFS, SSF,SSS}

Xi é uma variável aleatória Bernoulli (i=1,2,3).

X é o número de caras.



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSF)	p^2q	2
(SFS)	p^2q	2
(SFF)	pq^2	1
(FSS)	p^2q	2
(FSF)	pq^2	1
(FFS)	pq^2	1
(FFF)	q^3	0

Daí temos que:

$$P(X=0)=P(\{FFF\})=$$

$$P(X=1)=P(\{FFS,FSF,SFF\})=$$

$$P(X=2)=P(\{FSS,SFS,SSF\})=$$

$$P(X=3)=P(\{SSS\})=$$

A função de probabilidade da v.a. X é dada por:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$				

O comportamento de X , pode ser representado pela seguinte função:

$$P(X=x)=\begin{cases}\binom{3}{x}p^{x}(1-p)^{3-x}, & x=0,1,2,3\\ 0, & c.c\end{cases} \qquad onde \quad \binom{3}{x}=\frac{3!}{x!(3-x)!}$$

• Distribuição Binomial, n = 4:

			SSFF		
			SFSF		
		SFFF	*SFFS*	*SSSF*	
		FSFF	*FSSF*	*SSFS*	
		FFSF	*FSFS*	*SFSS*	
	FFFF	*FFFS*	*FFSS*	*FSSS*	*SSSS*
Valores de **X**:	0	1	2	3	4
Probab.:	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

Experimentos binomiais

Características de um experimento binomial

- O número de tentativas é fixo (***n***).
- As ***n*** tentativas são independentes e repetidas em condições idênticas.
- Para cada tentativa há dois resultados possíveis, *S* = sucesso *ou* *F* = fracasso.
- A probabilidade de sucesso numa tentativa única é ***p***. ***P*(*S*) = *p***

  A probabilidade de fracasso é ***q***. ***P*(*F*) =*q*, *onde p* + *q* = 1**
- O problema central está em determinar a probabilidade de ***x*** sucessos em ***n*** tentativas, sendo ***x*** = 0 ou 1 ou 2 … ***n***.

A variável aleatória *x* é uma contagem do número de sucessos em *n* tentativas.

Larson/Farber Ch. 4

Distribuição de uma v.a. Binomial

O ensaio de Bernoulli consiste em realizar um experimento aleatório uma só vez e observar se certo evento ocorre ou não.

Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de "sucesso", dão origem ao modelo Binomial.

Notação, $X \sim B(n,p)$, para indicar que v.a. X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p.

- **Distribuição Binomial**

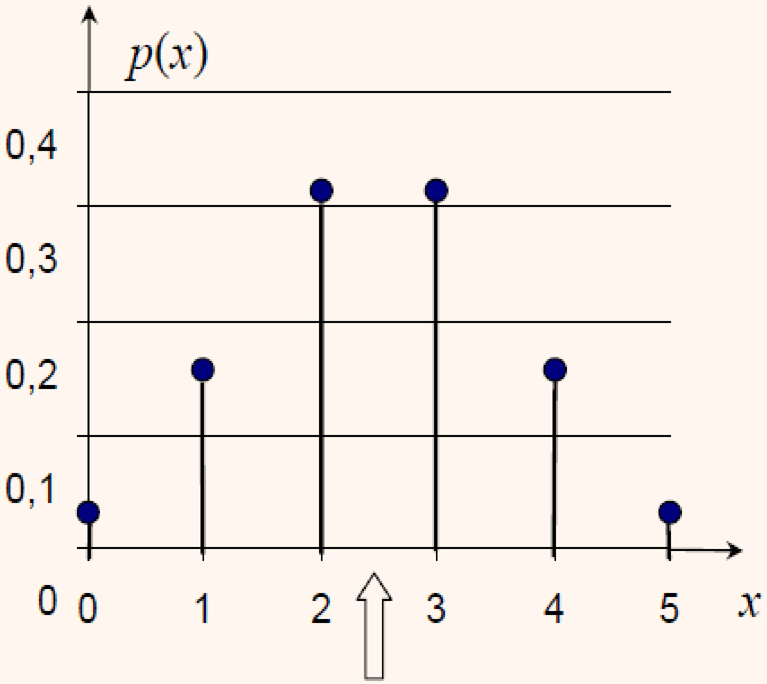
$$P(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} . p^x . (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, ..., n)$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\, x!} \quad \text{(coeficien te Binomial)}$$

$$E(X) = n.p \qquad V(X) = n.p.(1-p)$$

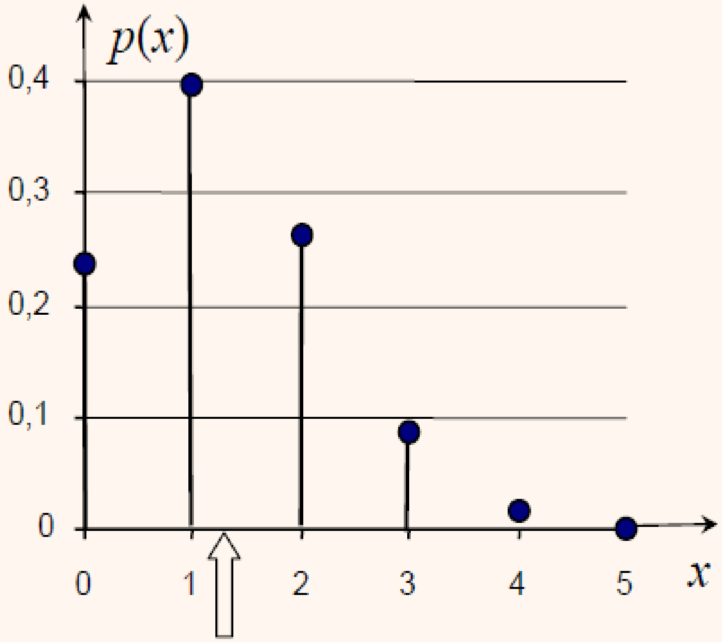
• Distribuição Binomial

binomial com $n = 5$ e $p = 0{,}5$



$E(X) = 2{,}5$

binomial com $n = 5$ e $p = 0{,}25$



$E(X) = 1{,}25$

Tente adivinhar as respostas

1. Qual é o 11º dígito depois do ponto decimal de um número irracional *e*?
(a) 2 (b) 7 (c) 4 (d) 5

2. Qual foi o Índice Dow Jones em 27 de fevereiro de 1993?
(a) 3.265 (b) 3.174 (c) 3.285 (d) 3.327

3. Quantos jovens do Sri Lanka estudaram em universidades norte-americanas entre 1990 e 1991?
(a) 2.320 (b) 2.350 (c) 2.360 (d) 2.240

4. Quantos transplantes de rins foram feitos em 1991?
(a) 2.946 (b) 8.972 (c) 9.943 (d) 7.341

5. Quantos verbetes há no American Heritage Dictionary?
(a) 60.000 (b) 80.000 (c) 75.000 (d) 83.000

Larson/Farber Ch. 4

Exemplo 3

Resultados do teste

As respostas corretas são:

1. d 2. a 3. b 4. c 5. b

Conte o número de questões a que você respondeu corretamente. Chamemos esse número de *x*.

Por que esse foi um experimento binomial?

Quais são os valores de *n*, *p* e *q*?

Quais são os valores possíveis de *x*?

Larson/Farber Ch. 4

Exemplo 4

Experimentos binomiais

Um teste de múltipla escolha tem oito questões, cada qual com três alternativas, uma delas correta. Você quer saber qual a probabilidade de 'chutar' certo em exatamente cinco questões. Determine n, p, q e x.

$n =$ $p =$ $q =$ $x =$

Um médico lhe diz que certa cirurgia é bem-sucedida em 80% das vezes. Se a cirurgia for realizada sete vezes, determine a probabilidade de ser bem-sucedida em exatamente seis. Determine n, p, q e x.

$n =$ $p =$ $q =$ $x =$

Larson/Farber Ch. 4

Exemplo 5

Suponha que a probabilidade de um indivíduo do sexo masculino, com mais de 60 anos, vida sedentária e fumante ativo de desenvolver uma doença cardiovascular nos próximos 8 anos seja de 40%. A partir de um estudo controle com dez indivíduos com essas características, a probabilidade de que nenhum deles sofra doenças cardiovasculares no período determinado pode ser calculada da seguinte forma:

A probabilidade de ter menos de três indivíduos com DCV seria calculada:

A probabilidade de ter mais de dois indivíduos com DCV seria calculada:

O número esperado e o desvio padrão de DCV no final do período seriam:

Exemplo 5

Exemplo 6

O escore em um teste internacional de proficiência na língua inglesa varia de 0 a 700 pontos, com mais pontos indicando um melhor desempenho. Informações, coletadas durante vários anos, permitem estabelecer o seguinte modelo para o desempenho no teste:

Pontos	[0, 200)	[200, 300)	[300, 400)	[400, 500)	[500, 600)	[600, 700]
p_i	0,06	0,15	0,16	0,25	0,27	0,11

Várias universidades americanas, exigem um escore mínimo de 600 pontos para aceitar candidatos de países de língua não inglesa. De um grande grupo de estudantes que prestaram o último exame, escolhemos ao acaso 10 deles. Qual a probabilidade de no máximo 2 atenderem ao requisito mencionado? Em um grupo de 2200 candidatos espera-se que quantos sejam aprovados?

Exemplo 6

Exemplo 4.

• Ex - Binomial n = 10 e p = 0,7

- Qual a probabilidade da maioria também acessar a p24?

- **P(X > 5) =**

= p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + + p(10)

= 0,8497

Tabela da binomial

n	x	0,70
10	0	0,0000
	1	0,0001
	2	0,0014
	3	0,0090
	4	0,0368
	5	0,1029
	6	0,2001
	7	0,2668
	8	0,2335
	9	0,1211
	10	0,0282

$\boxed{X > 5}$