

Métodos de Deformação em Sistemas Interativos

Suene Ferreira Campos¹, Liliane dos Santos Machado²

¹ Universidade Federal da Paraíba – Departamento de Matemática
João Pessoa – PB – Brazil

² Universidade Federal da Paraíba – Departamento de Informática
João Pessoa – PB – Brazil

suenecampos@yahoo.com.br, liliane@di.ufpb.br

Abstract. *This paper presents methods used for modelling deformation of graphical objects generated by computer and details related to math support used in their development. The goal is to evaluate the relation of mathematical description in the composition of the main features of each method and discuss its influence on the computational complexity in the visual quality of the results when applied in interactive systems.*

Resumo. *Este trabalho apresenta métodos tradicionalmente utilizados para a deformação de objetos gerados computacionalmente, detalhando o suporte matemático utilizado para o desenvolvimento dos mesmos. O objetivo é avaliar a relação da descrição matemática na composição das principais características dos métodos mencionados e a influência desta na complexidade computacional e qualidade dos resultados quando aplicados em sistemas interativos.*

Keywords: deformable models, computer graphics, interactive systems.

1. Introdução

Nos últimos anos a Computação Gráfica vêm apresentando um amplo desenvolvimento, sendo observada sua aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento humano, principalmente no estudo de modelos. Nesse contexto, o papel da Computação Gráfica consiste não só na visualização de informações, mas também na representação de ações e relações a serem observadas [Gomes e Velho 1990].

Sistemas gráficos interativos são sistemas computacionais gerados por computador que permitem, além da visualização de imagens, a manipulação das mesmas pelo usuário. A exploração das potencialidades destes sistemas é realizada a partir da discretização matemática de formas, comportamentos e fenômenos naturais que permitem a obtenção de respostas condizentes com as características do que é simulado. A interatividade nestes sistemas relaciona-se à possibilidade de exploração por parte do usuário e à obtenção de respostas não programadas, sendo esta última a sua mais importante propriedade, uma vez que permite exploração de ambientes e situações pouco comuns a partir de simulações [Machado e Moraes 2004].

No processo de desenvolvimento de sistemas gráficos interativos, a construção dos objetos visuais é o primeiro passo a ser tomado. O processo de criação, representação e manipulação dos objetos é denominado modelagem e possui duas

importantes abordagens: a modelagem geométrica, onde a geração dos objetos obedece às regras formais da Geometria Clássica e utiliza recursos da Topologia, e a modelagem procedural, onde os objetos são criados a partir das regras que determinam a sua forma e evolução [Gomes e Velho 2003].

A presença de objetos característicos em sistemas interativos se faz necessária uma vez que complementam a representação dos ambientes gerados. Em muitas aplicações, os objetos representam não apenas as formas, como também comportamentos inerentes aos mesmos quando submetidos a manipulações. Objetos virtuais que apresentam estas características são conhecidos como objetos deformáveis [Campos 2006a].

Existem diferentes métodos computacionais destinados à geração de objetos deformáveis. Estes são classificados entre métodos geométricos, físicos e híbridos. Os métodos geométricos baseiam-se apenas em fundamentos matemáticos apresentando semelhanças com o processo de modelagem geométrica; os métodos físicos consideram, além dos fundamentos matemáticos, princípios físicos que descrevam as características do material que compõe o objeto, relacionando-se desta forma com a modelagem procedural; finalmente, os métodos híbridos combinam características dos métodos físicos e geométricos [Gibson e Mirtich 1997] [Moore e Molloy 2007]. Os métodos para deformação se apresentam como particularizações dos métodos para modelagem sendo destinados à geração de objetos dinâmicos.

Este trabalho apresenta alguns dos mais importantes métodos para deformação de objetos gerados computacionalmente, detalhando o suporte matemático utilizado para o desenvolvimento dos mesmos. O objetivo é avaliar a relação da descrição matemática na composição das principais características dos métodos mencionados e a influência desta na complexidade computacional e qualidade dos resultados quando aplicados em sistemas interativos.

2. Modelagem para Sistemas Interativos

Em diversas áreas científicas é necessário o uso de modelos (objetos) para a representação de características de entidades concretas ou abstratas. Por exemplo, pode-se citar o modelo atômico de Bohr para o estudo das estruturas do átomo e os modelos econômicos que descrevem aspectos de uma dada economia, dentre outros. O objetivo de modelar determinados objetos ou fenômenos é permitir a visualização e o entendimento da estrutura ou personalidade dos mesmos e proporcionar um veículo conveniente para experimentação e predição de efeitos de explorações [Foley 1997] [Cotin 1999].

Em sistemas computacionais a criação de objetos se destina à análise e estudo de comportamentos e fenômenos específicos a partir da realização de simulações com o mesmo. Em geral, os problemas a serem simulados objetivam a verificação de componentes e propriedades dos objetos sobre a influência de características dos ambientes em que eles se encontram, além de manipulações sofridas. Neste contexto, o processo de modelagem utilizado deve permitir a modificação de sua estrutura, de forma que sejam simuladas também as relações dos objetos com o meio em que estão inseridos [Gomes e Velho 1990].

O processo de modelagem constitui-se de três etapas: a criação do modelo, que se caracteriza na definição dos dados a serem apresentados a partir de métodos

geométricos e de análise numérica; a representação do modelo, que faz uso de técnicas de estrutura de dados e topologia combinatória de modo a armazená-lo no computador, e a análise do modelo, que consiste no estudo das propriedades dos seus objetos [Gomes e Velho 1990] [Azevedo e Conci 2003].

Segundo Gomes e Velho (1990), na representação dos objetos o universo físico onde eles se encontram é associado a um espaço M , constituído pelos entes matemáticos utilizados na construção dos mesmos. Este espaço servirá como base para a descrição dos objetos a partir de suas propriedades geométricas. Existem dois tipos de objetos que podem ser definidos de acordo com a dimensão de M : os objetos de superfície (definidos por superfícies 2D que os limitam) e os objetos sólidos (subconjuntos fechados e limitados 3D). Os objetos gerados, mesmo que não sejam reais, devem ser condizentes com a realidade do espaço físico real no qual eles se originam, em outras palavras, os objetos devem ser realizáveis e para isso, devem satisfazer algumas condições:

Rigidez: A forma deve ser invariante por isometrias;

Homogeneidade: Um objeto deve ter um interior e uma fronteira bem definidos;

Finitude: Um objeto deve ser descrito por um número finito de elementos, ocupando uma região limitada do espaço.

A modelagem de objetos procura, portanto, representar no computador o mundo físico real. Isto pode ser feito a partir da discretização matemática das formas e características dos objetos reais. Neste contexto, a modelagem pode ser classificada em duas categorias: a modelagem geométrica, voltada a representação da topologia dos objetos, e a modelagem procedural, que adiciona a geração topológica do modelo a descrição de comportamentos.

Finalmente, o processo de modelagem engloba o desenvolvimento completo do modelo a ser simulado e estende-se da geração das formas de seus objetos até a determinação de suas características, etapa na qual são estabelecidos os fatores que irão especificar as propriedades que o objeto deve apresentar, como qualidade visual e funcionalidades como deformação, interação, entre outros.

3. Modelagem para Objetos Deformáveis

Os métodos computacionais destinados a modelagem de objetos deformáveis originam-se, entre outros fatores, da necessidade de simulação não só das formas de objetos reais mas de seus comportamentos. A modelagem de objetos deformáveis tem sido estudada em Computação Gráfica por mais de duas décadas a partir de um número imenso de aplicações. No desenho auxiliado por computador (CAD), pode-se perceber a presença de objetos deformáveis para criar e editar curvas e formas complexas, assim como sólidos e superfícies. No mercado do entretenimento, o uso de objetos deformáveis pode ser observado em animações. Em empresas e nas áreas científicas as aplicações são voltadas à modelagem, simulações de comportamentos e treinamento de pessoal [Gibson e Mirtich 1997] [Moore e Molloy 2007].

Os métodos destinados a modelagem de objetos deformáveis são conhecidos como métodos de deformação e classificam-se em três categorias: Métodos Geométricos, que utilizam apenas fundamentos matemáticos, como pontos de controle

ou formas paramétricas, para a composição dos objetos, Métodos Físicos, que incorporam ao tratamento geométrico das formas dos objetos, princípios físicos, tais como dinâmica e tópicos da mecânica do contínuo e finalmente, os Métodos Híbridos, que associam características das duas categorias anteriores de forma a aproveitar as potencialidades de cada uma [Gibson e Mirtich 1997].

3.1. Métodos Geométricos

Nos métodos geométricos, o objeto ou o espaço ao seu redor é deformado a partir de manipulações puramente geométricas, como vértices e pontos de controle. Geralmente, as técnicas geométricas de deformação são eficientes computacionalmente e relativamente simples de implementar. No entanto, estas técnicas não permitem a simulação da mecânica envolvida nas deformações proporcionando assim movimentos pouco realistas [Basdogan e Ho 1999].

Dentre as principais técnicas geométricas destacam-se: *Spline* e *Free-Form Deformation* (FFD). Ambas utilizam o artifício da manipulação indireta dos vértices do objeto a partir de pontos de controle situados no espaço ao seu redor.

3.1.1 *Spline*

O termo *Spline* originou-se das longas e flexíveis barras de metal usadas na construção de aeronaves, navios e carros [Foley 1997]. *Splines* são segmentos curvos matematicamente descritos com o uso de técnicas de interpolação numérica. Vários modelos matemáticos foram estudados com a finalidade de obter uma equação que descrevesse ou aproximasse a *spline* real. No processo de modelagem de objetos deformáveis, o uso de curvas é determinado essencialmente como passo intermediário para a criação das superfícies dos objetos.

Uma vez que as curvas *splines* são descritas a partir da combinação de diversos segmentos curvos menores, o processo de interpolação utilizado para a formulação dos mesmos especifica as suas diversas extensões existentes: *B-Spline*, *Spline* Cúbica Racional, entre outros. Ainda quanto aos métodos de interpolação, estes podem trabalhar de forma exata sobre os pontos que irão determinar a curva ou apenas aproximá-los [Bartels 1987]. Neste último caso, suavizando o resultado final [Gomes e Velho 1990] [Moore e Molloy 2007].

A seguir serão apresentados dois tipos de curvas *splines*: as curvas de Bézier e as curvas *B-Splines* do ponto de vista das funções interpolantes de aproximação, uma vez que estas são mais adequadas para a Computação Gráfica devido à maior suavidade dos resultados.

Curvas de Bézier

A idéia utilizada no desenvolvimento das curvas de Bézier é bastante simples. Dados $n+1$ pontos p_0, p_1, \dots, p_n no espaço E , define-se uma curva $C:[0,1] \rightarrow E$ através de interpolações lineares sucessivas. Considera-se inicialmente a linha poligonal P ligando os pontos p_i, p_{i+1} com $i = 0, 1, \dots, n-1$. Em seguida, dado $t \in [0,1]$, define-se em cada segmento $p_i p_{i+1}$ da poligonal P um ponto p_i^1 por interpolação linear

$$p_i^1 = t p_{i+1} + (1 - t) p_i \quad (1)$$

Constrói-se, desse modo, uma nova poligonal P^1 definida pelos pontos $p_0^1, p_1^1, \dots, p_n^1$ composta por $n-1$ segmentos. Sua construção pode ser observada na Figura 1 [Gomes e Velho 1990].

Prosseguindo a construção acima e usando a nova linha poligonal P^1 , após n etapas obtêm-se um ponto p^n do espaço E . Esse ponto é, por definição, o valor de $C(t)$ onde, a partir de alguns cálculos, comprova-se se tratar de uma função polinomial de grau n na variável t . Além disso, $C(t)$ pode ser escrita como a combinação linear dos pontos p^n da seguinte forma,

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i \quad (2)$$

onde os polinômios

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, i = 0, \dots, n-1 \quad (3)$$

utilizados para definir as curvas de Bézier são chamados de polinômios de Bernstein.

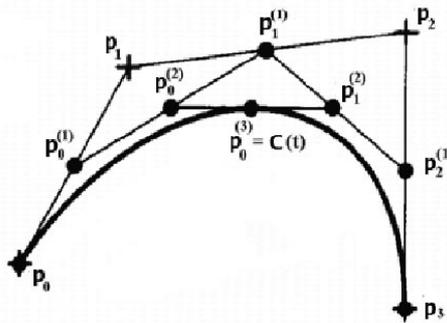


Figura 1: Curva de Bézier formada após 3 passos [Andrade 1999].

A equação de $C(t)$ em função dos polinômios de Bernstein foi descoberta por P. Bézier e por essa razão a curva $C(t)$ passou a ser chamada de curva de Bézier. A linha poligonal formada pelos pontos p^n é chamada de polígono de controle [Gomes e Velho 1990].

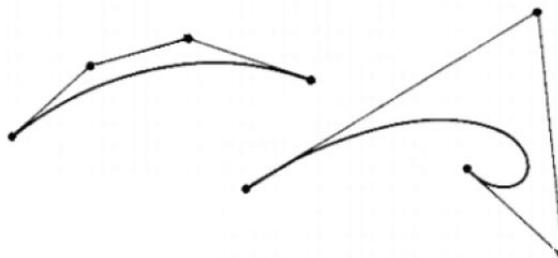


Figura 2: Curvas de Bézier definidas por quatro pontos de controle [Andrade 1999].

A formulação da curva de Bézier apresenta algumas propriedades como a interpolação apenas do ponto inicial e final do polígono de controle e ser tangente ao lado do polígono de controle que contém esses pontos. Outras propriedades são:

- Invariância Afim: Se T é uma transformação afim do espaço, p^0, \dots, p^n é um polígono de controle e $C(t)$ a respectiva curva de Bézier, então $T(C(t)) = C_T(t)$ é uma curva de Bézier associada ao polígono $T(p^0, \dots, p^n)$.
- Fecho convexo: A curva está sempre contida no mesmo espaço do seu polígono de controle.

A propriedade da invariância afim permite que construções geométricas com curvas de Bézier possam ser realizadas em um sistema de coordenadas mais conveniente e depois transformadas para o sistema de coordenadas desejado. O fecho convexo indica que se o polígono estiver contido em um subespaço afim então a curva de Bézier correspondente também estará [Akenine-Möller e Haines 2002].

Alguns inconvenientes na utilização das curvas de Bézier relacionam-se ao fato de que o grau dos polinômios cresce com o número de pontos de controle e à falta de controle local, uma vez que a alteração de um ponto no polígono de Bézier acarreta alteração de toda a curva [Andrade 1999].

Curvas B-Splines

A construção das curvas B-Splines assemelha-se com o método de Bézier apresentado. No entanto, há algumas vantagens com relação ao primeiro. Neste método, dada uma partição $P: 0 < l < \dots < n$ do intervalo $[0, n]$, define-se o espaço dos B-Splines subordinado a P , como sendo o conjunto das funções $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$, tais que f é um polinômio de grau r em cada sub-intervalo $[i, i+1]$ da partição onde $i=0, \dots, n-1$, e f tem classe de diferenciabilidade $r-1$. As características que compõem a interpolação podem ser justificadas em termos da aplicabilidade computacional. Por exemplo, o fato da função f ser um polinômio simplifica o processamento computacional da mesma. De modo análogo, a diferenciabilidade de f garante a continuidade da curva gerada [Gomes e Velho 1990] [Akenine-Möller e Haines 2002].

Como a função f apresenta grau r , freqüentemente denominam-se as curvas geradas por este processo de B-Splines de grau r . Os pontos a serem interpolados são chamados de pontos de controle e sua manipulação descreve a modificação da curva gerada. Uma das características da B-Spline é o controle local proporcionado pelas funções interpolantes. Este controle local é importante uma vez que a composição de formas a partir das curvas B-Splines pode ser obtida por ajustes sucessivos dos pontos de controle que formam as mesmas.

Existe uma forma geral que permite se obter a função interpolante, também conhecida como função básica dos B-Splines de grau r . Essa forma é recursiva e dada pelas equações

$$L_1(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ x+1 & -1 < x < 0 \\ 0 & x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$L_k(x) = \frac{1}{k+1} (xL_{k-1}(x) + (k-1-x)L_{k-1}(x-1)) \quad (5)$$

Finalmente, para a definição de uma curva B-Spline, dados $n+1$ pontos de controle em \mathbb{R}^n , p_0, p_1, \dots, p_n , define-se a curva $C:[0,n] \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $C(t) = \sum_{i=0}^n l_i(t)p_i$ onde l_i são Splines básicos $l_i(x) = L_r(x-i)$.

Superfícies B-Splines e Superfícies de Bézier

As curvas de Bézier e B-Splines podem ser generalizadas para superfícies dando origem às superfícies de Bézier e superfícies B-Splines, respectivamente. Para as superfícies de Bézier, sejam p_{ij} , $i=0, \dots, m$, $j=0, \dots, n$, um conjunto de pontos no espaço E , por simplicidade considerado \mathbb{R}^3 , se tomados os pontos de tal forma que sua projeção no plano xOy seja formada pelos vértices de mn retângulos de mesmas dimensões (congruentes), a superfície de Bézier definida pelos p_{ij} é a superfície $Q:[0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} J_{ni}(u) K_{mj}(v) \quad (6)$$

onde $J_{ni}(u)$ e $K_{mj}(v)$ são polinômios de Bernstein.

Algumas propriedades das curvas de Bézier são passadas para as suas superfícies tais como a invariância afim e o fecho convexo do polígono de controle, neste caso tridimensional [Andrade 1999].

As superfícies B-Splines por sua vez são definidas de forma semelhante às de Bézier, bastando trocar as funções básicas J_{ni} e K_{mj} pelas funções interpolantes L_i que definem as curvas B-Splines [Andrade 1999]. Desta forma, dados k e l , uma superfície B-Spline é uma superfície $Q:[0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} p_{ij} L_{ik}(u) M_{jl}(v) \quad (7)$$

3.1.2 Free-Form Deformation – FFD

O método *Free-Form Deformation* (FFD) foi apresentado em 1986 por Sedemberg e Parry no artigo “*Free-Form Deformation of Solid Geometric Models*” e consiste em uma maneira bastante intuitiva e eficiente de deformar diferentes topologias a partir do mapeamento de pontos de sua superfície. O método FFD consiste em introduzir um objeto de qualquer representação gráfica dentro de um espaço determinado por um volume parametrizado, o qual terá seus pontos (pontos de controle) interligados aos pontos do objeto a partir de funções [Gibson e Mirtich 1997] [Moore e Molloy 2007].

Em trabalhos iniciais, Barr (1984) promoveu rotações e torções em objetos a partir do mapeamento do espaço tridimensional onde eles estavam contidos. No entanto, as deformações se mostraram com uma rigidez acentuada e requeriam uma laboriosa composição de mapeamentos para resultados mais complexos. O método apresentado por Sedemberg e Parry consistiu numa generalização do método proposto por Barr, apresentando melhorias como maior aplicabilidade e deformações mais suaves [Gibson e Mirtich 1997].

Matematicamente, o método FFD é definido em termos do produto trivariado polinomial de Bernstein. Para um dado objeto no espaço, impõe-se um sistema de

coordenadas local em uma região a ser utilizada como volume de controle tal como um paralelepípedo observado na Figura 3. Para qualquer ponto X pertencente ao objeto, calcula-se as suas coordenadas locais (s, t, u) a partir da relação,

$$X = X_0 + sS + tT + uU \quad (8)$$

que possui a seguinte solução vetorial

$$s = \frac{T \times U \cdot (X - X_0)}{T \times U \cdot S}, t = \frac{S \times U \cdot (X - X_0)}{S \times U \cdot T}, u = \frac{S \times T \cdot (X - X_0)}{S \times T \cdot U} \quad (9)$$

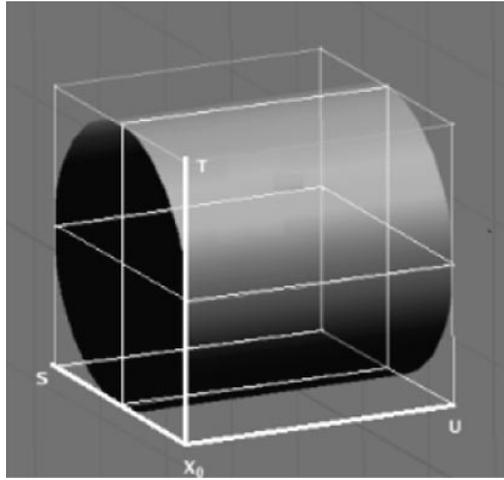


Figura 3: Sistema Local (S,T,U).

O próximo passo é a determinação do conjunto de pontos de controle P_{ijk} sobre a região em forma de paralelepípedo. Para isso são estabelecidos $l+1$ planos na direção S, $m+1$ planos na direção T e $n+1$ planos na direção U (Figura 4) [Sederberg e Parry 1986]. As localizações dos pontos de controle são a partir daí definidos por:

$$P_{ijk} = X_0 + \frac{i}{l}S + \frac{j}{m}T + \frac{k}{n}U \quad (10)$$

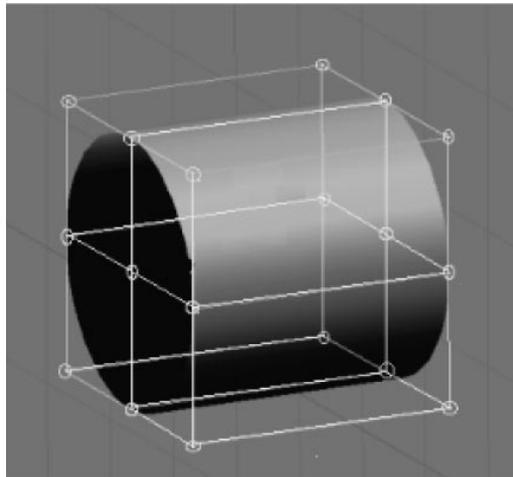


Figura 4: Distribuição dos pontos de controle.

A função de deformação é finalmente definida por um produto tensorial trivariado de Bernstein. A posição de deformação X_{ffd} de cada ponto X é encontrada a partir da imposição dos valores de suas coordenadas locais (s,t,u) a cada deslocamento dos pontos de controle P_{ijk} [Sederberg e Parry 1986].

$$X_{ffd} = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} s^i (1-s)^{l-i} \left[\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \right] \right] P_{ijk} \quad (11)$$

Pode-se observar, portanto, que as deformações neste método são obtidas a partir da manipulação indireta dos pontos do modelo. O estabelecimento dos pontos de controle como coeficientes da função de deformação faz com que cada movimento realizado sobre os mesmos interfira diretamente na localização dos vértices do modelo (Figura 5). A função de deformação pode ser formulada em termos de outras bases polinomiais, tais como produto tensorial *B-Splines* ou produtos não tensoriais polinomiais de Bernstein. As deformações podem ser definidas localmente ou globalmente dependendo da porção do objeto que a região de controle engloba [Sederberg e Parry 1986].

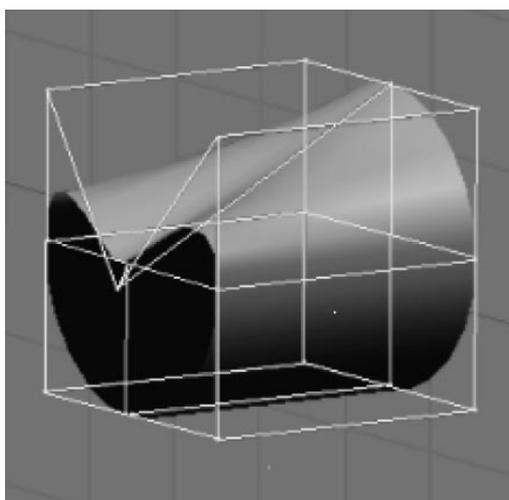


Figura 5: Objeto deformado.

3.2 Métodos Físicos

Os métodos físicos destinados à deformação de objetos deformáveis surgiram a partir da necessidade de modelagem de ambientes e fenômenos naturais, cujo desenvolvimento torna-se praticamente impossível a partir de técnicas puramente geométricas. Estes métodos apresentam-se como exemplos de modelagem procedural, uma vez que uma das suas principais motivações é o desafio de representar a complexidade de objetos do mundo real tanto em termos de sua forma quanto do seu comportamento.

Segundo Gomes e Velho (1990), os métodos para deformação fisicamente baseados consideram no processo de modelagem leis da Mecânica e da Dinâmica para modelar o movimento e a forma dos objetos. Neste sentido, os parâmetros fundamentais usados na definição dos modelos, são de natureza puramente física, tais como forças e torques [Terzopoulos 1987]. Além disso, os modelos dependem do tempo, uma vez que as equações que modelam as leis do sistema físico devem ser integradas ao longo do tempo para que forças e torques possam atuar, produzindo o efeito desejado. As técnicas

usadas para definir os modelos nessa área são bem definidas: Modelos Matemáticos de Física e Métodos Numéricos.

Dentre os métodos físicos existentes, a grande maioria partilha de uma base comum: os modelos massa-mola e os modelos formulados a partir do método dos elementos finitos.

3.2.1 Método Massa-Mola

O método para deformação massa-mola, como o próprio nome sugere, está relacionado aos sistemas massa-mola trabalhados pela Mecânica. Mais especificamente, a idéia utilizada pelo método é considerar a geometria do objeto como um conjunto de pontos de massa conectados por ligamentos de molas. Cada um dos pontos de massa é o mapeamento de um ponto específico do objeto e o deslocamento dos mesmos descreve a sua deformação.

Para descrever o método, Provot (1996) escolheu um modelo bidimensional composto por $m \times n$ pontos de massa, cada um conectado a seus vizinhos por ligamentos de molas de comprimento natural diferente de zero (Figura 6). As molas entre vizinhos podem apresentar três diferentes naturezas.

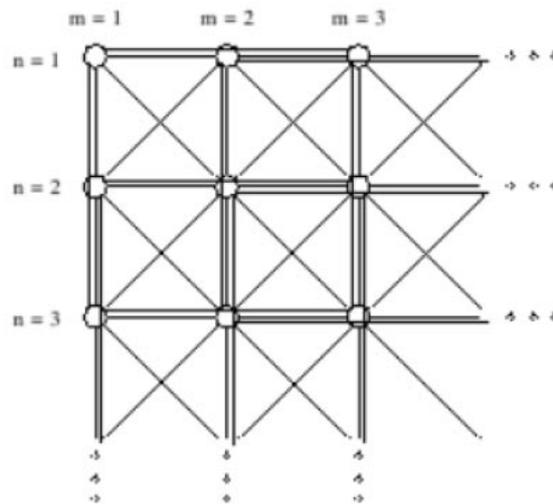


Figura 6: Malha retangular e estrutura de molas [Provot 1996].

- Molas Estruturais: Molas que ligam os pontos de massa $[i,j]$ com $[i+1,j]$ e $[i,j]$ com $[i,j+1]$. São responsáveis por tensões de molas nos movimentos de tração e compressão;
- Molas de Cisalhamento: Molas que ligam os pontos de massa $[i,j]$ com $[i+1,j+1]$ e $[i+1,j]$ com $[i,j+1]$. São responsáveis pelas tensões de molas sobre movimentos transversais;
- Molas de Flexão: Molas que ligam os pontos de massa $[i,j]$ com $[i+2,j]$ e $[i,j]$ com $[i,j+2]$. Trabalham sobre movimentos de flexão sobre o objeto.

Na descrição do comportamento do modelo, cada ponto de massa tem a sua posição descrita no tempo t denotada por $P_{i,j}(t)$, onde $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$. A evolução dinâmica do sistema é baseada na segunda lei de Newton:

$$F_{ij} = \mu a_{ij} \quad (12)$$

onde μ é a massa de cada ponto $P_{i,j}$ e a_{ij} é sua aceleração causada pela força F_{ij} .

Para o cálculo do valor da força F_{ij} devem ser consideradas todas as forças atuantes no sistema, fazendo com que a força F_{ij} seja a força resultante das forças internas e externas a serem trabalhadas pelo sistema. As forças internas são resultantes das tensões de molas que ligam $P_{i,j}$ a seus vizinhos e podem ser calculadas a partir da lei de Hooke [Provot 1996]:

$$F_{\text{int}}(P_{i,j}) = - \sum_{(k,l) \in R} K_{i,j,k,l} \left[l_{i,j,k,l} - l_{i,j,k,l}^0 \frac{l_{i,j,k,l}}{\|l_{i,j,k,l}\|} \right] \quad (13)$$

onde:

- R é o conjunto de todos os (k,l) tais que $P_{k,l}$ é ligado ao ponto $P_{i,j}$
- $l_{i,j,l,k} = \overline{P_{i,j}P_{k,l}}$
- $l_{i,j,k,l}^0$ é o comprimento natural da mola que liga $P_{i,j}$ e $P_{k,l}$
- $K_{i,j,k,l}$ é a rigidez das molas que ligam $P_{i,j}$ e $P_{k,l}$

As forças externas podem ser de diversas naturezas e vão depender do tipo de ambiente ao qual o objeto será exposto. Forças como gravidade e viscosidade são habitualmente acrescentadas a diversos tipos de objetos [Provot 1996].

Após o cálculo das forças internas e externas atuantes sobre o sistema, a posição de cada ponto de massa $P_{i,j}$ pode ser obtido a partir da formulação de uma equação diferencial de segunda ordem. Para a determinação do comportamento do sistema como um todo, um sistema composto por estas equações é gerado e passa a ser solucionado a cada modificação no valor da força resultante $F_{i,j}(t)$ aplicada sobre o modelo no tempo t . Entretanto, a solução deste sistema apresenta um custo computacional que afeta diretamente a qualidade das deformações devido o tempo requerido para o redesenho das novas coordenadas do objeto. Para reverter este problema o sistema é submetido a um método de integração numérica no tempo, como por exemplo, o método de Euler:

$$\begin{cases} a_{i,j}(t + \Delta t) = \frac{1}{\mu} F_{i,j}(t) \\ v_{i,j}(t + \Delta t) = v_{i,j}(t) + \Delta t a_{i,j}(t + \Delta t) \\ P_{i,j}(t + \Delta t) = P_{i,j}(t) + \Delta t v_{i,j}(t + \Delta t) \end{cases} \quad (14)$$

onde Δt é o espaço de tempo definido [Provot 1996].

Sistemas massa-mola têm sido usados em animações faciais, representações de ações musculares e simulações de procedimentos médicos [Gibson e Mirtich 1997]. Em aplicações destinadas a simulações realistas, os objetos deformáveis compostos por este método permitem a incorporação de propriedades inerentes ao seu semelhante real a partir da inserção de constantes de mola e massa. Ainda nestes sistemas, os pontos de

massa e os ligamentos de molas podem formar diferentes tipos de polígonos, tais como triângulos ou quadrados (Figura 7). No entanto, na grande maioria das aplicações destinadas a objetos realistas, a estrutura triangular é a mais indicada, uma vez que permite a composição de geometrias mais suaves. Como extensão, há casos em que a estrutura de pontos de massa-mola formam volumes, particularmente utilizados na modelagem de deformações volumétricas [Moore e Molloy 2007].

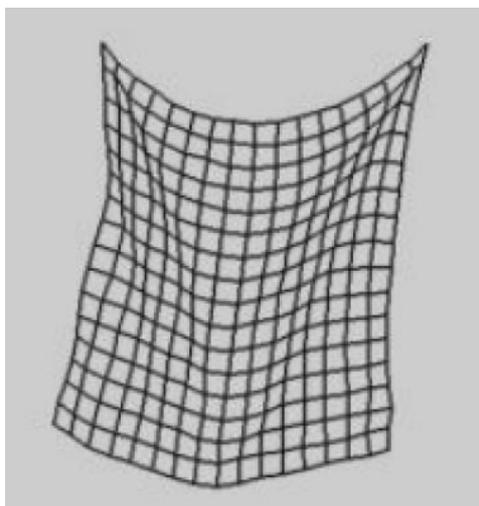


Figura 7: Objeto deformável bidimensional [Campos 2006b].

3.2.2 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica de aproximação numérica utilizada para a solução de problemas de valores de contorno, isto é, problemas que consistem em determinar uma função que satisfaça uma determinada equação diferencial em um dado domínio, conhecendo-se os valores que a função e suas derivadas assumem no contorno do domínio [Ribeiro 2004].

Para a solução de problemas envolvendo objetos deformáveis a partir deste método, deve ser feita uma distinção entre a formulação matemática do problema e a sua solução numérica, consistindo esta última na aplicação do MEF. Entretanto, para que haja uma relação entre as mesmas, as equações matemáticas referentes ao modelo a ser gerado devem atender alguns requisitos [Gibson e Mirtich 1997]. O problema deve ser escrito na sua forma variacional, ou seja, envolvendo equações integrais, e devem ser estabelecidos os fatores que irão influenciar na solução do problema (condições de contorno) [James e Pai 1999].

Para a aplicação do MEF na modelagem de objetos deformáveis, os objetos são trabalhados com base em conceitos da Mecânica do Contínuo, ramo da Mecânica que trabalha o modelo como um sólido com massa e energia uniformemente distribuída, denominado corpo contínuo. O conceito de contínuo permite a definição de ponto geométrico como um limite matemático tal como na definição de derivada, o que faz com que os princípios físicos envolvidos sejam trabalhados por equações diferenciais [Gibson e Mirtich 1997] [Ribeiro 2004] [Moore e Molloy 2007].

De forma a definir o problema da deformação do objeto em sua forma variacional, esta passa a ser definida a partir da lei da conservação da Energia Potencial Total, que tem o seguinte enunciado:

“Seja um corpo impedido de se deslocar como um corpo rígido e submetido a forças externas. Dentre todas as configurações deformadas possíveis que atendem as condições de contorno, aquela que corresponde à configuração de equilíbrio minimiza a função de energia potencial total.”

Complementando a interpretação física do problema, define-se a energia potencial de um corpo como sendo o trabalho realizado por todas as forças externas e internas que agem sobre o mesmo estando ele em uma configuração deformada qualquer e retornando para a sua configuração inicial (equilíbrio) [Ribeiro 2004].

A energia potencial das forças internas é dada por

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T D \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (15)$$

onde D é uma matriz linear com os componentes de tensão do sistema elástico, e $\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy})$ são vetores componentes de tensão e $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ é o vetor deslocamento tridimensional.

A energia total das forças externas é dada por

$$W = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_b dV + \int_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_s dS + \sum i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{p}_i \quad (16)$$

onde: $f_b(x, y, z)$ são as forças aplicadas sobre o volume V , $f_s(x, y, z)$ são as forças aplicadas sobre a superfície S e p_i são cargas concentradas agindo sobre o ponto (x_i, y_i, z_i) .

Finalmente, a energia potencial total é dada por

$$\Pi = \Lambda - W \quad (17)$$

Segundo o princípio da energia potencial total, o equilíbrio será alcançado quando a variação da energia total for nula, isto é,

$$\partial \Pi = \partial \Lambda - \partial W = 0 \quad (18)$$

Assim, estes conceitos definem a formulação matemática do problema e desta forma a equação diferencial parcial a ser solucionada. Na busca da aproximação numérica do problema a partir do MEF, o domínio é discretizado em elementos, resultando em uma malha com n pontos nodais. Neste íterim, são utilizadas aproximações do tipo

$$\Phi(x, y, z) \approx \sum h_i(x, y, z) \Phi_i \quad (19)$$

onde h_i são funções interpolação e Φ_i são os valores de $\Phi(x, y, z)$ nos pontos nodais.

As funções interpolação são definidas de forma dependente da geometria do objeto, requerimentos de convergência, grau de liberdade e requerimentos computacionais. Usualmente, são equações polinomiais.

Para que a deformação seja controlada pela modificação dos valores da energia potencial, a mesma deve ter os seus componentes escritos como função do

deslocamento do material. Denotando o campo de deslocamento de um elemento (x,y,z) como $u=(u_x,u_y,u_z)$, função vetorial de três componentes. Deve-se escrever a função u como uma combinação linear das funções interpolação aplicadas ao deslocamento nodal:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = HU \quad (20)$$

onde $U = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_N, v_N, w_N)^T$, N é o número de nós, H é uma matriz de dimensão $3 \times 3N$ composta por funções interpolação, e U é o vetor composto pelos deslocamentos nodais. As tensões podem ser escritas na forma $\varepsilon = BU$, onde B é uma matriz $6 \times 3N$ onde sua primeira coluna é obtida de u por sua derivada em relação a x , a segunda coluna da derivada de v em relação a y e assim por diante.

Finalmente pode-se reescrever,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} \int_V U^T B^T DBU dV \\ &= \frac{1}{2} U^T \left(\int_V B^T DB dV \right) U \end{aligned} \quad (21)$$

$$W = \int_V U^T H^T f_b dV + \int_T U^T H^T f_s dV + U^T P \quad (22)$$

onde P é um vetor $3N \times 1$ derivado de H e F_b e F_s são as forças vetoriais integradas sobre o volume e a superfície do objeto. E

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T \left(\int_V B^T DB dV \right) U + U^T (F_b + F_s + P) \quad (23)$$

sendo esta a equação a ter a sua solução aproximada pelo MEF, resultando no deslocamento material do objeto em função do tempo.

4. Discussão

No processo de geração de modelos computacionais para pesquisa científica, a presença de objetos virtuais que representem tanto as formas quanto os comportamentos dos seus semelhantes reais apresenta-se como fator de extrema importância. Isto se deve aos objetivos envolvidos no desenvolvimento destes modelos, tais como avaliações, treinamentos, simulações entre outras ações que não poderiam ser realizadas de maneira conveniente sem a apresentação de comportamentos realistas por parte do sistema. Neste contexto, a possibilidade de manipulação dos objetos apresentados e a liberdade de ação dos mesmos quanto às explorações sofridas fazem dos sistemas computacionais interativos uma importante ferramenta para a compreensão e complementação de diversos trabalhos em diferentes áreas.

Com o desenvolvimento da Computação Gráfica, diversos métodos para deformação foram concebidos, todos apresentando vantagens e desvantagens quanto à

aplicabilidade computacional e qualidade nos resultados oferecidos. No que se refere a sistemas interativos, a escolha do método a ser trabalhado para uma determinada aplicação deve permitir a modelagem das propriedades que o sistema pretende oferecer, equilibrando um rápido processamento e precisão dos resultados. Neste trabalho, foi realizada uma revisão dos principais métodos de deformação utilizados para este fim.

Dentre os métodos geométricos apresentados (*Splines* e FFD), ambos oferecem formulação matemática relativamente simples quando comparada à formulação utilizada para os métodos físicos. O trabalho com funções de interpolação polinomiais permite uma boa aceitação quanto à aplicabilidade computacional e proporciona deformações com boa suavidade. Objetos deformáveis submetidos à deformação geométrica apresentam possibilidade indireta de manipulação a partir de pontos de controle, propriedade esta presente tanto no caso dos métodos *Splines* quanto no método FFD.

O método *Spline* e suas extensões permitem a geração de curvas complexas a partir de um número definido de pontos. No entanto, a geração de objetos a partir da combinação de diversos segmentos curvos faz a utilização do método em modelos complexos bastante laboriosa. O método FFD, por sua vez, pode ser aplicado a diferentes topologias, sendo escolhidos alguns pontos específicos de sua superfície para o relacionamento com os pontos de controle a serem gerados. Porém, o controle das movimentações dos objetos geometricamente gerados proporciona deformações que desconsideram totalmente as possíveis interferências do ambiente em que estão inseridos, gerando assim movimentos com baixos níveis de realismo.

Na modelagem física existe uma importante diferença nas formulações matemáticas devido ao tratamento físico envolvido. Enquanto que no método Massa-Mola as equações envolvidas são diferenciais ordinárias, o método dos Elementos Finitos utiliza equações diferenciais parciais, requerendo um maior cuidado no tratamento do problema.

O método Massa-Mola segue a linha da Mecânica Newtoniana e, desta forma, possui uma formulação simplificada. As aproximações das soluções permitem a maior aplicabilidade computacional dos problemas e proporcionam resultados com bons níveis de realismo e possibilidade de manipulação direta sobre a superfície do modelo, o que é bastante relevante em muitas aplicações interativas. O uso do método MEF por sua vez, exige um conhecimento mais detalhado no tratamento de equações diferenciais de contorno aplicados a problemas da Mecânica do Contínuo, uma vez que a implementação do método numérico requer uma série de pré-requisitos, como o tratamento do problema na sua forma variacional. A complexidade do método proporciona um maior custo computacional, que muitas vezes o torna inviável para diversos tipos de aplicações, dentre elas, sistemas interativos. Por outro lado, as deformações obtidas a partir do uso do MEF apresentam um apurado realismo [Bro-Nielsen 1996], principalmente quando comparado aos métodos de deformação citados anteriormente.

A maior parte das pesquisas voltadas ao desenvolvimento de objetos deformáveis busca um maior equilíbrio entre realismo e eficiência computacional. Atualmente, a combinação de algumas técnicas, dentre elas as citadas neste trabalho, têm se mostrado como uma das soluções para bons resultados em sistemas interativos, nos quais o desempenho computacional é fator preponderante. O aumento da

capacidade de processamento dos computadores e o avanço nas pesquisas tendem a diminuir as particularizações nas aplicações de cada método.

5. Agradecimentos

Suene Ferreira Campos foi bolsista PIBIC/CNPQ-UFPB. Esta pesquisa está inserida nos projetos CNPq 506480/2004-6 e FINEP 01-04-1054-000. Agradecimentos também a Leandro Carlos de Souza e Thaíse Kelly Costa Lima pela colaboração na geração das imagens.

6. Referências

- Akenine-Möller, T. e Haines, E. (2002), *Real-Time Rendering*, A. K. Peters.
- Andrade, L.N. (1999), “Curvas e Superfícies de Bézier e B-Splines”, <http://www.mat.ufpb.br/>, Agosto.
- Azevedo, E. e Conci, A. (2003), *Computação Gráfica – Teoria e Prática*, Ed. Campus.
- Bro-Nielsen, M. (1996), “*Surgery simulation using fast finite elements*”. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 1131, pp.:529–534.
- Barr, A. (1984), “*Global and local deformations of solid primitives*”. *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, Proceedings of SIGGRAPH 84*, pp. 21-30. ACM SIGGRAPH.
- Bartels, R.H., Beatty, J.C. e Barsky, B.A.(1987), *An introduction to splines for use in computer graphics & geometric modeling*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.
- Basdogan, C. e Ho, C. (1999), “*A Force Reflecting Deformable Objects for Virtual Environment*”, *Siggraph 99 Course Notes*, n. 38, ACM.
- Campos, F.S., Moraes, R. e Machado, L. (2006), “*Adjusting Deformation Methods for Virtual Reality Systems*”, *Proc. of World Congress on Computer Science Engineering and Technology Education - WCCSETE'2006*, Santos. CD-ROM. (a)
- Campos, J.R., Silva,R.M. e Melo,V.F. (2006), “*Modelos Deformáveis de Partículas e Algoritmos de Colisão Aplicados à Simulação de Tecidos*”. *Dissertação de Mestrado, Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande*. (b)
- Cotin, S.; Delingette, H e Ayache, N. (1999), “*Realtime elastic deformations of soft tissues for surgery simulation*”. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(1):62–73.
- Foley, D.J. et al. (1997), *Computer Graphics: Principles and Practice - 2nd* , Addison Wesley.
- Gibson, S. e Mirtich, B. (1997), “*A Survey of Deformable Modeling in Computer Graphics Technical Report*”, *Relatório Técnico (TR-97-19)*. Mitsubishi Electric Research Laboratory.
- Gomes, J.M. e Velho, L.C. (1990), *Conceitos Básicos de Computação Gráfica*. São Paulo, IME-USP.
- Gomes, J.M. e Velho, L.C. (2003), *Fundamentos da Computação Gráfica*. IMPA.

- James, D.L. e Pai, D.K. (1999), “*Artdefo-accurate real time deformable objects*”. Siggraph 1999, Computer Graphics Proceedings, pp.65-72.
- Machado, L.S. e Moraes, R.M. (2004), “*Teaching Human Body Structures Using Virtual Reality*”, Proc. of World Congress on Eng. and Tech. Education, pág. 153-156.
- Moore, P. e Molloy, D. (2007), “*A Survey of Computer-Based Deformable Models*”, International Machine Vision and Image Processing Conference (IMVIP 2007), pp. 55-66 , setembro.
- Provot, X. (1996), “*Deformation Constraints in a Mass-Spring Model to Describe Rigid Cloth Behavior*”. Proceedings of Graphic Interface'95, pp. 147-154, Canadá.
- Ribeiro, F.L.B (2004), “Introdução ao Método dos Elementos Finitos”, Notas de Aula, http://www.coc.ufrj.br/~fernando/downloads/Curso_MEF1.pdf, acessado em Dezembro de 2006.
- Sederberg, T.W. e Parry, R.S. (1986), “*Free-form deformation of solid geometric models*”. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, Proc. of SIGGRAPH 86, pp 151-160. ACM SIGGRAPH.
- Terzopoulos, D., Platt, J., Barr, A. e Fleischer, K. (1987), “*Elastically deformable models*”. Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH'87), 21(4) pp.205-214.