Introdução às Equações Diferenciais Fuzzy: inclusões diferenciais versus extensão de Zadeh

Marina Tuyako Mizukoshi*

Instituto de Matemática e Estatística, UFG, Cx Postal 131, Goiânia, GO
http://www.mat.ufg.br

Resumo Neste minicurso pretende-se estabelecer os conceitos preliminares da teoria de conjuntos fuzzy, munindo das ferramentas que sejam relevantes para a teoria a ser desenvolvida. Apresenta-se os resultados fundamentais para o cálculo fuzzy. Estuda-se a solução do problema do valor inicial tanto sob a perspectiva da teoria de inclusões diferenciais como via extensão de Zadeh. Por fim, estuda-se alguns aplicações dentro dos dois contextos de soluções.

Keywords: conjuntos fuzzy, multifunções, extensão de Zadeh, Problema do Valor Inicial

1 Introdução

A modelagem de fenômenos reais por meio de sistema de equações diferenciais determinísticas

$$x'(t) = f(t, x) \tag{1}$$

quase sempre está incompleta. Por exemplo, o valor inicial pode não ser exatamente conhecido e os valores dos coeficientes das equações diferenciais são incertos. Se os parâmetros forem estimados utilizando alguma medida podem estar sujeito a erros.

As incertezas foram formalmente admitidas nas ciências há três séculos e desde então, a modelagem de incertezas tem sido dominada pelos métodos estocásticos. No entanto, no século atual, temos testemunhado uma onda crescente de teorias e métodos alternativos para se estudar as incertezas e o concomitante decrescimento nos domínios do pensamento probabilístico, embora existam casos onde a teoria estocástica seja ainda a mais indicada [17]. Surgem então, outras aproximações para o estudo das equações variacionais com incertezas, dentre as quais destacamos: a teoria de inclusões diferenciais [9], que surgiu por volta de 1930 e teve um grande desenvolvimento com o surgimento do Princípio do Máximo de Pontryagin; a Teoria de subconjuntos fuzzy, introduzida por Lotfi A. Zadeh[13] em 1965 e a Teoria de Inclusões Diferenciais Fuzzy, que foi inicialmente estudada por Aubin[9] e Baidosov[21].

* mtuyako@gmail.com

Se a natureza dos erros for aleatória, utiliza-se as equações diferenciais estocásticas. No entanto, se a natureza não estiver fundamentada na teoria probabilística, devido a escolhas subjetivas, a teoria fuzzy é a mais indicada para o estudo das equações diferenciais com incertezas. Neste minicurso estuda-se as equações diferenciais fuzzy, mais especificamente, das equações diferenciais fuzzy autônomas, ou seja, quando o campo não depende explicitamente da variável tempo. A equação diferencial fuzzy(EDF) foi inicialmente estudada em 1978 por Kandel e Byatt[2]. Os conceitos de diferenciabilidade e integrabilidade de multifunções fuzzy $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, foram estabelecidos por Puri e Ralescu[15]. Com esses conceitos deu-se início ao estudo das equações diferenciais fuzzy por Kaleva[10], Seikkala[20], dentre outros, utilizando uma extensão da derivada de Hukuhara para multifunções fuzzy. No entanto, o PVIF baseado na derivada de Hukuhara modifica o comportamento qualitativo quando a condição inicial é incerta, mas pode-se escolher os níveis da mesma de forma adequada para se obter o resultado desejado.

Pretende-se introduzir os conceitos básicos de teoria fuzzy [14] necessários para estudar o Problema do Valor Inicial Fuzzy com a condição inicial e/ou coeficientes da equação diferencial dados por subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ no contexto das multifunções, isto é, utilizando as inclusões diferenciais fuzzy [26,**?**,8,20]. Em [25], Buckley considera a equação diferencial em $\mathbb{R}$ com alguns coeficientes independentes do tempo e a solução da mesma é utilizada para definir a solução fuzzy como uma extensão da solução clássica via o princípio de extensão de Zadeh . Já Oberguggenberger e Pittshmann [23] estudam sistema de equações diferenciais com parâmetros fuzzy, aplicando o princípio de extensão de Zadeh nas equações do sistema e nos operadores restrição e solução e outros[21,26,24], estudam as equações diferenciais fuzzy utilizando a teoria de inclusões diferenciais. A partir de uma família de inclusões diferenciais clássicas, obtém-se a solução da equação diferencial fuzzy proposta por Hüllermeier. A solução construída dessa maneira têm boas propriedades, por exemplo, o diâmetro das soluções obtidas são necessariamente não crescentes com o tempo. Vale salientar que para o método de Hüllermeier, tem-se a noção de derivadas para multifunções fuzzy.

Considera-se também o estudo do Problema do Valor Inicial utilizando a extensão de Zadeh da solução determinística. Concluí-se que, sob certas condições, as soluções via inclusões diferenciais fuzzy e extensão de Zadeh coincidem. Por fim, através de alguns exemplos pretende-se comparar as soluções obtidas através dos dois métodos. O minicurso está dividido da seguinte maneira: introdução a teoria de multifunções para fundamentar a teoria de inclusões diferenciais; teoria fuzzy com o intuito de apresentar as ferramentas para estudar o Problema do Valor Inicial Fuzzy através da derivada de Hukuhara (onde é necessário o estudo de multifunções fuzzy), inclusões diferenciais fuzzy e o Princípio de Extensão de Zadeh; aplicações onde estuda-se o modelo de Malthus e Verhulst considerando a derivada de Hukuhara, a inclusão diferencial fuzzy e a extensão de Zadeh.

2 Multifunções

Esta seção inicia-se com a motivação de como surgiu o estudo da derivada em um contexto mais geral, isto é, em pontos onde a função não é suave.

Dada uma função $F : X \to Y$, de acordo com as propriedades dos espaços vetoriais dos conjuntos X e Y, a diferencial de F poderá admitir interpretações variadas, mas sempre significa a razão de mudança de uma variável em função de outra.

As características inerentes a diferenciabilidade poderá ser interpretada de três maneiras distintas: (a)fisicamente, como razão de mudança; (b) geometricamente, como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto; (c) analiticamente, como a possibilidade de aproximar uma função F por uma mais simples na vizinhança de um ponto.

Se F não for diferenciável ("suave"), então tem-se a falta das interpretações anteriores. Por exemplo, dada uma função real existem três situações possíveis: (i) derivadas laterais distintas; (b) derivadas laterais infinitas; (c) uma das derivadas laterais não existe. Assim sendo, o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$$

depende da escolha de uma sequência $h_n \to 0$, denominada derivada contingente de f. Por exemplo, se

$$f(x) = \begin{cases} xsen(1/x), \text{se } x \neq 0 \\ 0, \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Dado $a \in [-1,1]$, vamos definir $h_n = \dfrac{1}{arcsen(a)+2\pi n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, então

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(h_n)-f(0)}{h_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{h_n sen(arcsen(a)+2n\pi)}{h_n}.$$

Tem-se que todas as derivadas contingentes estão no intervalo $[-1,1]$, isto é,

$$contf(x) = \begin{cases} [-1,1], \text{se } x = 0 \\ sen(1/x)-(1/x)cos(1/x), \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Tem-se também a derivada paratingente definida como o conjunto de todos os limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}$, onde x_n e y_n são sequências arbitrárias que tendem à x.

Observação: Tem-se que $contf(x) \subset paratf(x)$, mas a recíproca nem sempre é verdadeira, pois se no exemplo anterior for considerado as sequências $x_n = \dfrac{1}{\pi/2+2\pi n}$ e $y_n = \dfrac{1}{2}x_n$ tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n sen(\pi/2+2\pi n) - 1/2x_n sen(\pi+4\pi n)}{1/2x_n} = 2 \notin contf(0).$$

No entanto, $paratf(0) = (-\infty,+\infty)$.

Se F for lipschitziana, então os conjuntos contingentes e paratingentes deverão ser limitados. No entanto, se F for continuamente diferenciável ou de classe C^1, isto é, F é diferenciável com derivada contínua, então os conjuntos coincidem e são iguais ao conjunto derivada.

Além das citadas anteriormente, existem outras aproximações para derivadas generalizadas de funções não suaves. Para a função modular, por exemplo, considere o conjunto de todas as retas que intersectam o gráfico somente na origem, denominado epígrafo. Analiticamente o conjunto destes gráficos é denominado subdiferencial, $\partial F(x) = paratF(0) = [-1, 1]$. No entanto, o conceito de subdiferencial não descreve bem a estrutura local da função em diversas situações e isto ocorre pelo fato do mesmo exigir a convexidade das funções.

A análise não suave, que surge de problemas de otimização ou ainda da teoria de jogos, é uma das fontes e motivações para o estudo de análise de multifunções desde que cada generalização da derivada usual é um conjunto, o qual é o objeto de estudo da mesma. A análise de multifunções inclui o Cálculo Diferencial e Integral como uma extensão do cálculo clássico bem como alguns problemas específicos. Surge assim, o estudo equivalente a do estudo da teoria de equações diferenciais, denominado inclusões diferenciais, que estuda objetos do tipo:

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \tag{2}$$

onde $F(t, x)$ é uma multifunção utilizado para o estudo de equações diferenciais com o lado direito descontínuo ou um controle optimal.

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

onde a função $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser descontinua com respeito a variável x em vários pontos, inclusive em x_0. No sentido clássico o problema (3) não teria solução. Para contornar o inconveniente, Filippov em 1960, sugeriu considerar (3) sob o ponto de vista de (2) com $F(t, x) = co\{\lim_{n\to\infty} f(t, x) : x_n \to x\}$ que sempre admite solução com o lado direito semi contínuo superiormente com valores convexos.

No que segue, considere as seguintes notações e definições básicas.

2^X é a família de todos os subconjuntos $A \subset X$ fechados e não vazios.

$K(X)(C(X))$ é a família de todos os subconjuntos $A \subset X$ compactos (convexos).

Dada $F : X \to 2^Y$ uma multifunção, tem-se:

(a)$domF = x \in X : F(x) \neq$ é o domínio de F;

(b) $grafF = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ é o gráfico de F.

(c)$F^{-1}(C) = \{x \in X : F(x) \subset C\}$ é denominado a pequena pré-imagem de $C \subset Y$ sob a a aplicação F.

(d)$F_{-1}(C) = \{x \in X : F(x) \cup C \neq\}$ é denominado a pré-imagem total de $C \subset Y$ sob a a aplicação F.

(e) $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ é a pré-imagem total de A.

(f)$F^{-1} : Y \to X, F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ é a aplicação inversa de F.

Example 1. O sistema de controle

$$\begin{cases} x' = f(t, x, u) \\ x(t_0) = \xi \\ u \in U(t, x) \end{cases} \tag{4}$$

associa a multifunção $\xi \to S(\xi)$, onde $S(\xi)$ é o conjunto de todas as trajetórias do sistema.

Example 2. A aplicação inversa de uma função que não é injetiva, em geral, é uma multifunção. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então $x = F(y) = \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}, y \geq 0$.

Em uma família de conjuntos pode-se definir uma topologia e uma métrica (não existe, em geral, somente uma estrutura linear). A convergência de Kuratowski é uma noção de convergência para sequências de conjuntos compactos em um espaço métrico. Então, os conceitos de continuidade para multifunções dependerá da definição da estrutura métrica ou topológica em 2^X.

A convergência de Kuratowski é mais fraca que na métrica de Hausdorff, mas se X for espaço métrico compacto, então coincidem.

Definition 1. *O limite superior de Painlevé-Kuratowski, denotado por* $\lim_{n\to\infty} supA_n$, *é definido como o conjunto de todo* $v \in X$ *tal que para cada vizinhança* v *a intersecção com um número infinito de conjuntos* $A_n, n = 1, 2, \ldots$ *é não vazia. O conjunto* $v \in X$ *tal que para cada vizinhança* v *a intersecção com todo* $A_n, n = 1, 2, \ldots$ *suficientemente grande é denominado limite inferior de Painlevé-Kuratowski e denotado por* $\lim_{n\to\infty} infA_n$. *A sequência* $\{A_n\}$ *converge para* A *(no sentido da topologia de limites) se* $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} supA_n = \lim_{n\to\infty} infA_n = A$.

Definition 2. *Diz-se que* $F : X \to Y$ *é semicontínua superior (semicontínua inferior) em* $x_0 \in X$ *se para cada sequência* $\{x_n\}$ *convergindo para* x_0 *a inclusão* $\lim_{n\to\infty} supF(x_n) \subset F(x_0)$, *respectivamente* $F(x_0) \subset \lim_{n\to\infty} infF(x_n)$ *for verdadeira.*

Definition 3. *(L. Vietoris) Diz-se que* $F : X \to Y$ *é semicontínua superior em um ponto* $x_0 \in X$ *se para cada aberto* $V \supset F(x_0)$ *existe uma vizinhança* U *de* x_0 *tal que* $V \supset F(x), \forall x \in U$. *Diz-se que* $F : X \to Y$ *é semicontínua inferior em um ponto* $x_0 \in X$ *se para cada aberto* $V \subset Y$ *com* $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ *então existe uma vizinhança* U *de* x_0 *tal que* $V \cap F(x) \neq \emptyset, \forall x \in U$. *Diz-se que* $F : X \to Y$ *é contínua se for semicontínua superior e inferior em* $x_0 \in X$.

observações:1) $F : X \to Y$ é semicontínua superior (inferior) segundo a definição de Vietoris se para cada aberto $V \subset Y$ a pequena pré-imagem $F^{-1}(V)$, respectivamente, a pré-imagem total $F_{-1}(V)$ é aberto em X.

2) A semicontinuidade superior de uma multifunção $F : X \to 2^Y$ garante que o gráfico seja fechado (no mínimo, se Y for um espaço métrico). A recíproca também é verdadeira e também se F admitir valores compactos.

Example 3. A multifunção $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, definida por $F(x) = \begin{cases} [-1,1], & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$
é semicontínua superiormente, pois:

(a) Para todo $x \neq 0, F(x) = 0$, é uma função real constante, logo contínua;

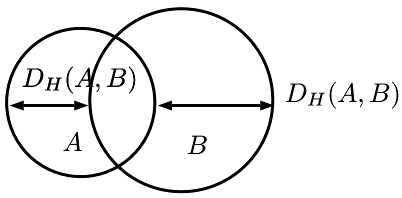
(b) Se $x_0 = 0, F(x_0) = [-1,1]$. Sejam $V = (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \supset F(x_0)$ e U vizinhança qualquer de x_0 tal que $F(U) = [-1,1] \subset V$.

Example 4. A multifunção $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, definida por $F(x) = \begin{cases} [-1,1], & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$
é semicontínua inferiormente.

Um subconjunto em $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e, somente se, ele for fechado e limitado. Se X e Y são conjuntos compactos de um espaço métrico, então a distância $d(X,Y)$ será finita, $d(X,X) = 0$ e satisfaz a desigualdade triangular, mas nem sempre é simétrica e $d(X,Y) = 0$ não implica necessariamente que $X = Y$, mas que $X \subseteq Y$. Por exemplo, $d([1,3,6,7],[3,6]) = 2$, mas $d([3,6],[1,3,6,7]) = 0$.

Se Y for um espaço métrico com a distância $d(.,.)$ na família de conjuntos limitados de 2^Y pode-se definir a métrica de Pompeiu-Hausdorff, que mede o quão distantes estão dois subconjuntos de um espaço métrico um do outro, pela fórmula

$$h(A,B) = max\{D_H(A,B), D_H(B,A)\} = max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y), \sup_{y\in B}\inf_{x\in A} d(x,y)\right\} \tag{5}$$



Se Y é um espaço normado com a bola unitária fechada $\bar{B}$, então
$D_H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B + \varepsilon\bar{B} \text{ e} B \subset A + \varepsilon\bar{B}\}$.

Em matemática, um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo. Então, um espaço de Banach é um espaço vetorial com uma métrica que permite calcular o comprimento do vetor e a distância entre vetores e é completa no sentido de que toda sequência de Cauchy de vetores sempre converge para um valor bem definido no próprio espaço.

Se X é um espaço de Banach então existe um homeomorfismo entre o espaço dos conjuntos convexos com a distância de Pompeiu-Hausdorff e o subespaço de todas as funções contínuas. Esta métrica sugere a seguinte definição de semicontinuidade.

Definition 4. *Diz-se que $F : X \to 2^Y$ é semicontínua superior por Hausdorff em um ponto $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de x_0 tal* *que* $F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon \bar{B}, \forall x \in U$. *Diz-se que* F *é semicontínua inferiormente por Hausdorff em um ponto* $x_0 \in X$ *se para qualquer* $\varepsilon > 0$, *existir uma vizinhança* U *de* x_0 *tal que* $F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon \bar{B}, \forall x \in U$.

observação:(1) Em geral, todos os conceitos de continuidade são distintos, mas todos eles coincidem se Y for um espaço de Banach e $F : X \to compY$.

(2) A intersecção de multifunções que são semicontínuas inferiormente pode não ser semicontínua inferiormente. Por exemplo, seja $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada $\lambda \in [0, 1]$ o segmento em $\mathbb{R}^2$,

$F_1(\lambda) = \{(x_1, x_2) : x_2 = \lambda x_1, -1 \leq x_1 \leq 1\}$

e $F_2(\lambda) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_2 \geq 0\}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Então F_1 e F_2 são sempre contínuas, mas a intersecção não é semicontínua inferiormente para $\lambda = 0$.

O problema da seleção contínua é muito importante para a análise de multifunções e não existe uma equivalente na análise clássica. Uma multifunção $f : X \to Y$ é uma seleção da multifunção $F : X \to 2^Y$ se $f(x) \in F(x)$ para cada $x \in X$.

Theorem 1. *[9] (Teorema de Michael)Seja* X *um espaço métrico paracompacto arbitrário (em particular, espaço métrico) e* Y *um espaço de banach. Suponha que* $F : X \to 2^Y$ *é uma multifunção sci com valores fechados e convexos, então dado* $(w_0, x_0) \in Gr(F)$ *existe uma seleção contínua* $f : X \to Y$ *de* F *tal que* $f(w_0) = x_0$.

Note que a existência de uma seleção contínua passando em um ponto do gráfico é uma condição suficiente para garantir a semicontinuidade inferior e o fechamento do gráfico garante a semicontinuidade superior.

Example 5. Consideremos a multifunção $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ definida por

$$\begin{cases} [-1, 1], \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Tem-se que F é semicontínua inferiormente, porém não é possível encontrar uma seleção contínua de F definida em $\mathbb{R}$.

O resultado a seguir apresenta um resultado que garante seleções contínuas aproximadas para multifunções semicontínuas superiormente.

Theorem 2. *[9] Sejam* X *e* Y *espaços normados. Suponhamos que a multifunção* $F : X \to 2^Y$ *seja semicontínua superiormente e que admita valores convexos e fechados. Então, dado* $\varepsilon > 0$ *existe uma função a valores contínuos* $f_\varepsilon : X \to Y$ *tal que:*

(i) $f_\varepsilon(x) \in coF(X), \forall x \in X$;

(ii) $Gr(f_\varepsilon) \subset Gr(F) + \varepsilon \bar{B}$, *onde* $\bar{B}$ *é a bola unitária de* $X \times Y$.

A teoria equivalente ao cálculo diferencial e integral para multifunções difere da teoria usual e a mesma foi elaborada levando em consideração os conceitos de cone tangente e normal. Desde que existem definições diferentes para a diferenciabilidade os mesmos nos levam a multiplicidade relativa aos conceitos de derivadas de multifunções, dependendo de que tipo de cone está sendo considerado.

2.1 Integral e Diferencial de Multifunções

Seja $T = [a, b]$ e $K^n(C)$ consiste de todos os subconjuntos compactos, convexos e não vazios de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1. *A multifunção $F : T \to K^n(C)$ é mensurável se ela é semicontinua superior, ou inferior, ou ainda, contínua.*

Definition 5. *Sejam $F : T \to 2^{\mathbb{R}^n}$ uma multifunção e $S(F) = \{f : T \to \mathbb{R}^n :$ f é integrável e $f(t) \in F(t), \forall t \in T\}$. Então a integral de Aumann de F em T é definida como $\displaystyle\int_T F = \{\int_T f(t)dt : f \in S(F)\}$.*

Theorem 3. *[5] Se $F : T \displaystyle\int_T \to 2^{\mathbb{R}^n}$, então $\displaystyle\int_T F = \emptyset$ ou $\displaystyle\int_T F$ é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.*

Definition 6. *A multifunção $F : T \to 2^{\mathbb{R}^n}$ é dita mensurável se seu gráfico é um conjunto mensurável, isto é, $\{(t, x) : x \in F(t)\} \in A \times B$, onde A denota a $\sigma-$álgebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis e B denota os subconjuntos Borel mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.*

Definition 7. *Se $A \in \mathbb{R}^n$, define-se a função suporte de A por $S_A(x) =$ $\displaystyle\sup_{a \in A} < x, a >$, onde $< ., . >$ é o produto interno em $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$.*

Definition 8. *Dados $A, B \in C^n$, onde C^n são subconjuntos fechados não vazios de $\mathbb{R}^n$ tal que $A = B + C$, então C é a diferença de Hukuhara ou a H - diferença, denotada por $A - B$.*

Definition 9. *Diz-se que a multifunção $F : T \to K_C^n$ é H-diferenciável num ponto $t_0 \in T$, se existe $DF(t_0) \in K_C^n$ tal que:*

$$\lim_{h \to 0^+} h\left(\frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h}, DF(t_0)\right) = 0$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} h\left(\frac{F(t_0) - F(t_0 - h)}{h}, DF(t_0)\right) = 0.$$

Nos pontos extremos, considera-se apenas um dos limites. Diz-se que $DF(t_0)$ é a H-diferencial de F no ponto t_0.

Example 6. Sejam $T = [0,1]$ e $G : T \to 2^{\mathbb{R}^n}$ com $G(t) = B[0,t] = tB[0,1]$, onde $B[0,t]$ é a bola de centro na origem e raio $t \in \mathbb{R}^n$. Verifique que G é diferenciável e $DG(t_0) = B[0,1], \forall t_0 \in [0,1]$.

De fato:

Tem-se que:

$$\lim_{h\to 0^+} h\left(\frac{G(t_0+h)-G(t_0)}{h}, DG(t_0)\right) = \lim_{h\to 0^+} h\left(\frac{(t_0+h)B[0,1]-t_0B[0,1]}{h}, B[0,1]\right) = \lim_{h\to 0^+} h(B[0,1],B[0,1]) = 0.$$

e

$$\lim_{h\to 0^+} h\left(\frac{G(t_0)-G(t_0-h)}{h}, DG(t_0)\right) = \lim_{h\to 0^+} h\left(\frac{t_0B[0,1]-(t_0-h)B[0,1]}{h}, B[0,1]\right) = \lim_{h\to 0^+} h(B[0,1],B[0,1]) = 0.$$

Definition 10. *Seja $F : T \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ uma multifunção,*

$$x' \in F(t,x), x(0) = x_0$$

é denominada um inclusão diferencial. Uma função absolutamente contínua $x : T \to \mathbb{R}^n$, a qual satisfaz a inclusão diferencial é denominada uma solução tipo Carathéodory da mesma.

observação: Se F admitir valores convexos e for semicontinua inferiormente com respeito as variáveis (t,x) então dado um ponto (x_0,v_0) com $v_0 \in F(0,x_0)$ pelo Teorema de Michael podemos encontrar uma seleção contínua $f(t,x) \in F(t,x)$ tal que $f(0,x_0) = v_0$. Logo, do Teorema de Peano tem-se uma solução do Problema de Cauchy.

O conjunto de todas as soluções de uma inclusão diferencial sobre o intervalo $[0,\tau]$ por $S(x_0,\tau)$ e o conjunto atingível por

$$A(x_0,\tau) = \{x(\tau) : x(.) \in S(x_0,\tau)\}$$

.

O conjunto atingível de uma inclusão diferencial é o conjunto de todos os estados possíveis de um sistema em um instante t. Um dos principais problemas da teoria de inclusões diferenciais consiste em descrever e estimar os conjuntos atingíveis das mesmas, mesmo em problemas lineares, veja [22].

Example 7. [7]Considere a inclusão

$$\begin{array}{l} x'(t) \in F(t,x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{array} \tag{6}$$

onde $F(t,x) = h(t,x)+cg(t,x)[-1,1]$, com h,g funções reais Lipschitz contínuas. Aubin e Cellina mostraram que (6) é equivalente a um sistema de controle do tipo $x'(t) = h(t,x)+cg(t,x)u(t)$, para todo controle mensurável $u : I \to [-1,1]$ e que para cada $t > 0$, o conjunto atingível é um intervalo, isto é,

$$A(t) = [x_-(t), x_+(t)],$$

onde $x_-(t), x_+(t)$ são as soluções minimal e maximal de 6, ou seja,

$x'_+(t) = f(t, x_+(t)) + cg(t, x_+(t))$

$x'_-(t) = f(t, x_-(t)) + cg(t, x_-(t))$.

Se por exemplo, $F(t, x(t)) = rx + cux, u \in [-1, 1]$ com condição inicial $x(0) = x_0$, então $A(t) = [x_0 e^{(r-c)t}, x_0 e^{(r+c)t}]$.

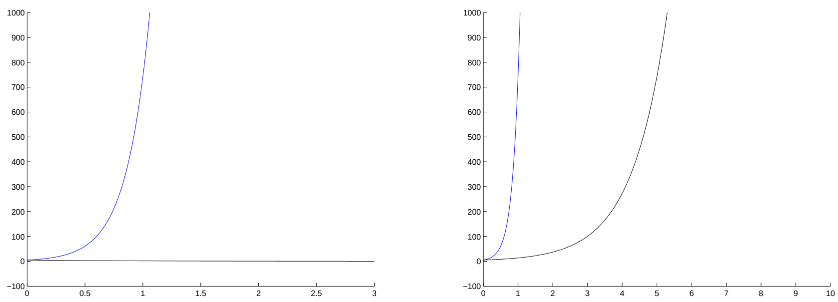


Figura 1. Conjunto Atingível para $r < c$ e $r > c$.

Neste caso, se $c < r$, então os limites inferior e superior tendem para o infinito, enquanto que se $c > r$, o inferior se aproxima de zero e o outro irá para o infinito, isto é, a extinção populacional é possível.

3 Teoria Fuzzy

Nesta seção introduz-se os conceitos básicos relativo a teoria de conjuntos fuzzy, o princípio de Extensão de Zadeh e a teoria de multifunções fuzzy.

Definition 11. *Um subconjunto fuzzy* A *de* X *é um conjunto de pares ordenados* $A = \{(x, \mu(x)) : x \in X\}$, *onde* $\mu : X \to [0, 1]$ *é uma função chamado grau de pertinência de* x *em* A, *de modo que se* $x \in X$, *então* $\mu(x)$ *denota o grau de pertinência de* $x \in X$.

observação: Um conjunto $A \subset X$ pode ser identificado como um conjunto fuzzy através de sua função característica $\xi_A : X \to [0, 1]$, onde

$$\xi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x \in A \\ 0, \text{se } x \notin A \end{cases}$$

A seguir a definição do nível de um subconjunto fuzzy que permitirá a utilização da teoria de topologia em $\mathbb{R}^n$ para o estudo da teoria de subconjuntos fuzzy através do Teorema de Representação de Negoita e Ralescu.

Definition 12. *Seja $u : X \to [0,1]$ um conjunto fuzzy e $\alpha \in (0,1]$. O conjunto $\alpha-$nível de u é o conjunto*

$$[u]^\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\},$$

para cada α. O suporte $[u]^0$ de u é o fecho na topologia de X da união de todos os $\alpha-$ níveis, $[u]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha>0} [u]^\alpha}$.

A união, intersecção e complemento podem ser definidos ponto a ponto através dos seus graus de pertinência.

Seja $E^n = \{u : \mathbb{R} \to [0,1]\}$ tal que os $\alpha-$níveis são subconjuntos fuzzy compactos e convexos com o suporte $[u]^0$ subconjunto limitado e convexo de $\mathbb{R}^n$, para todo $\alpha-$nível.

Theorem 4. *(Teorema de Representação de Negoita e Ralescu)[6] Se $[A]^\alpha; \alpha \in [0,1]$ é um conjunto compacto, convexo e não vazio da família de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que :*

1. $\overline{\bigcup A^\alpha} \subset A^0$;
2. $A^{\alpha_2} \subset A^{\alpha_1}$ *se* $\alpha_1 \leq \alpha_2$;
3. $A^\alpha = \bigcap_{k\geq 1} A^{\alpha_k}$, *se* $\alpha_k \uparrow \alpha > 0$.

então existe $U \in E^n$) tal que $[U]^\alpha = [A]^\alpha$, para todo $\alpha \in (0,1]$. Além disso,

$$[U]^0 = \bigcup_{0<\alpha\leq 1} [U]^\alpha \subset [A]^0.$$

Note que se X é um espaço topológico e $u, v : X \to [0,1]$ são subconjuntos fuzzy, não é de se surpreender que as operações algébricas entre eles sejam diferentes das realizadas na teoria clássica, pois nem sempre $(u+v)(x) = u(x) + v(x) \notin [0,1]$. No entanto, se tivermos conjuntos onde os elementos dos mesmos são constituídos de subconjuntos fuzzy scs ou se $X = \mathbb{R}^n$ é fuzzy compacto é possível através do Teorema de Representação de Negoita e Ralescu, definir uma soma entre conjuntos fuzzy adequadamente.

Para definir a soma para $u, v : X \to [0,1]$ subconjuntos fuzzy, com X espaço topológico, é necessário o Princípio de Extensão de Zadeh [12] e que o espaço seja linear.

Segundo Nguyen [12], o princípio de extensão proposto por L.A.Zadeh provem uma maneira natural para extender o domínio de uma aplicação ou uma relação definida sobre um conjunto U para subconjuntos fuzzy de U. Em particular, este princípio é útil na conexão com o cálculo de variáveis linguísticas , o cálculo de probabilidades linguísticas, a aritmética dos números fuzzy e, mais geralmente, em aplicações as quais necessitam de uma extensão do domínio de uma relação. Além disso, como mostrado em [28], a análise de números fuzzy através dos $\alpha-$níveis é mais simples do que através da utilização direta da definição de função de pertinência de subconjuntos fuzzy.

O Princípio de extensão de Zadeh permite que uma aplicação do tipo $f : X_1 \times X_2 \to Y$, onde X_1, X_2 e Y são subconjuntos não vazios serem estendidos para subconjuntos fuzzy $\hat{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \to \mathcal{F}(Y)$, onde $\hat{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} u_1(x_1) \wedge u_2(x_2), \text{se } f^{-1}(y) \neq \\ 0, \text{se } f^{-1}(y) = \end{cases}$, onde $\mathcal{F}(X_1) = \{u : u : X_1 \to [0,1]\}$ e $\mathcal{F}(X_2) = \{u : u : X_2 \to [0,1]\}$.

Assim, aplicando-se o Princípio de extensão de Zadeh para as funções $f : X \times X \to X$ e $f_1 : X \to X$, onde X é um espaço linear, definido por $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $f_1(x) = cx$ tem-se:

- $(u+v)(x) = \sup\limits_{x_1+x_2=x} u(x_1) \wedge u(x_2), \forall x \in X, \text{onde } u(x_1) \wedge u(x_2) = minu(x), v(x)$, e
- $cu(x) = u\left(\frac{x}{c}\right), c \neq 0$,

respectivamente.

Proposition 2. *Sejam X um espaço de Banach, $u, v : X \to [0,1]$ subconjuntos fuzzy compactos e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, $u + v : X \to [0,1]$ e $\lambda u : X \to [0,1]$ são fuzzy compactos e*

- $[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$;
- $[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$.

observação: Considere a aplicação $f : X \to Y$ e A um subconjunto fuzzy de X, usando o Princípio de Extensão pode-se definir $f(A)$ como um subconjunto fuzzy de Y tal que $f(A)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)} A(x), \text{se } f^{-1}(y) \neq \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$, onde $f^{-1} = \{x \in X / f(x) = y\}$. Se f for estritamente crescente ou decrescente, então $f(A)(y) = A(F^{-1}(y))$, se $y \in Im(f)$, onde $Im(f) = \{y \in Y / \exists x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$.

Example 8. Seja $f(x) = x^2$ e $A \in E$ um número triangular fuzzy com função de pertinência $A(x) = \begin{cases} 1 - |-x|, \text{se } |-x| \leq 1 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$

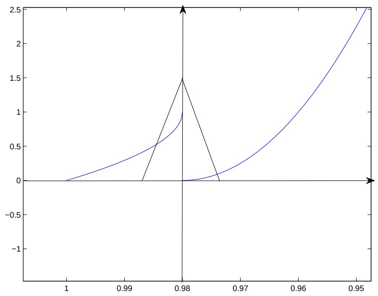
Então pelo Princípio de extensão de Zadeh
$f(A)(y) = \begin{cases} 1 - |-\sqrt{y}|, \text{se } |-\sqrt{y}| \leq 1 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$

Theorem 5. *[27] Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ está bem definida e,*

$$[\hat{f}(U)]^\alpha = f([U]^\alpha) = \{f(x)/x \in [U]^\alpha\},$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ e $U \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \{u : u : \mathbb{R}^n \to [0,1]\}$.

Uma consequência imediata do Teorema 5 é a seguinte:



Corollary 1. *[5]Se f é contínua, então $\widehat{f}$ é monótona no seguinte sentido:*

$$\textit{se } U \leq V, \textit{ então } \widehat{f}(U) \leq \widehat{f}(V),$$

onde $U \leq V$ significa que $U(x) \leq V(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

O resultado a seguir nos diz que a extensão de Zadeh de uma função contínua também é contínua em relação a métrica de Hausdorff D sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

A métrica mais comumente utilizada em E^n envolve a métrica de Hausdorff, a distância entre os conjuntos níveis dos conjuntos fuzzy.

Definition 13. *Sejam U, V elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, a distância de Hausdorff fuzzy entre U e V é definida por:*

$$D(U,V) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([U]^\alpha, [V]^\alpha)$$

onde h é a métrica de Hausdorff usual,

$$h([U]^\alpha, [V]^\alpha) = max[\rho([U]^\alpha, [V]^\alpha), \rho([V]^\alpha, [U]^\alpha)],$$

e

$$\rho([U]^\alpha, [V]^\alpha) = \sup_{x \in [U]^\alpha} \inf_{y \in [V]^\alpha} \|x - y\|$$

Example 9. Sejam $[u]^\alpha = \begin{cases} [0,1], 0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2} \\ \{0\}, \dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}$

e

$$[v]^\alpha = \begin{cases} [0, 2(1-\alpha)], \dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1 \\ [0{,}1], \quad 0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, $D([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \begin{cases} 2(1-\alpha), \dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1 \\ 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Observe que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ munido com a métrica D é um espaço métrico completo[15,29].

A seguir um teorema que será importante para o estudo de modelos com coeficientes e condição inicial dados por números fuzzy.

Theorem 6. *[27]Seja $f : X \times X \longrightarrow X$ uma função contínua e A e B números fuzzy. Então*

$$[\widehat{f}(A,B)]^\alpha = f([A]^\alpha, [B]^\alpha),$$

onde $f([A]^\alpha, [B]^\alpha) = \{f(x_1, x_2)/x_1 \in [A]^\alpha, x_2 \in [B]^\alpha\}$.

3.1 Multifunções Fuzzy

Apresentaremos aqui os conceitos relativos à multifunção fuzzy para posteriormente introduzir a teoria de inclusões diferenciais fuzzy.

A aplicação $F : T \to E^n$ é integralmente limitada se existir uma função integrável h tal que $\|x\| \le h(t), \forall x \in F_0(t)$.

Definition 14. *Seja $F : T \to E^n$. A integral de F sobre T, denotada por $\displaystyle\int_T F(t)dt$, é definida nível a nível pela equação $\displaystyle\left[\int_T F(t)dt\right]^\alpha = \int_T F_\alpha(t)dt = \left\{\int_T F(t)dt : f : T \to \mathbb{R}^n \text{ é uma seleção mensurável para } F_\alpha\right\}$, para todo $\alpha \in (0,1]$. Uma aplicação integralmente limitada e fortemente mensurável $F : T \to E^n$ é integrável sobre T se $\displaystyle\int_T F(t)dt \in E^n$.*

observação: Se $F : T \to E^1$, então $\displaystyle\left[\int_T F(t)dt\right]^\alpha = \left[\int_T f_1^\alpha(t)dt, \int_T f_2^\alpha(t)dt\right]$, onde $[F(t)]^\alpha = [f_1^\alpha, f_1^\alpha], \alpha \in [0,1]$.

Example 10. Seja $F : T \to E^1$ tal que $F(t)(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x = 0 \\ t, \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}, t \in [0,1]$

tal que $[F(t)]^\alpha = \begin{cases} [0,1], \text{se } \alpha \le t \le 1 \\ \{0\}, \text{se } 0 \le t < \alpha \end{cases}, \forall \alpha \in I$

Então,

$$\left[\int_0^1 F(t)dt\right]^\alpha = \int_0^1 [F(t)]^\alpha dt = [\int_0^\alpha 0dt, \int_0^\alpha dt] = [0, 1-\alpha].$$

Theorem 7. *Sejam $F, G : T \to \mathbb{R}^n$ integráveis, $k \in \mathbb{R}$ e $c \in [a,b]$, então:*

1. $\int F + G = \int F + \int G$;
2. $\int kF = k \int F$;
3. $\displaystyle\int_a^b F(t)dt = \int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt$;
4. $D(F,G)$ *é integrável;*
5. $D(\int F, \int G) \le \int D(F,G)$.

Dem:
Veja [6].

Theorem 8. *Se $F : T \to \mathbb{R}^n$ é integrável, então a função real*

$$(t, \alpha) \to diam \left[\int_a^t F(t)dt \right]^\alpha, t \in T, \alpha \in [0, 1],$$

é não decrescente com respeito a t sobre o intervalo T e com respeito a $\alpha \in [0, 1]$.

Prova:
Sejam $t_1, t_2 \in T, t_1 < t_2$, então
$\left[\int_a^{t_2} F \right]^\alpha = \left[\int_a^{t_1} F \right]^\alpha + \left[\int_{t_1}^{t_2} F \right]^\alpha$, isto é, $diam \left[\int_a^{t_2} F \right]^\alpha \geq diam \left[\int_a^{t_1} F \right]^\alpha$.
Do Teorema de Representação de Negoita e Ralescu decorre que que o diâmetro em relação a α é não decrescente.

Similarmente a definição de diferenciabilidade de multifunções, considera-se a seguinte definição de diferenciabilidade, segundo Puri e Ralescu [**?**].

Definition 15. *Uma aplicação $F : T \to \mathbb{E}^n$ é diferenciável em $t_0 \in T$ se existir $F'(t_0) \in E^n$ tal que os limites existem $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h}$ e $\lim_{h \to 0^-} \dfrac{F(t_0) - F(t_0 - h)}{h}$ existem e são iguais à $F'(t_0)$.*

observação: (1)Os limites são calculados considerando-se o espaço métrico (E^n, D). Da mesma forma que para as multifunções, nos extremos do intervalo deve-se considerar somente uma das derivadas laterais.

(2) Da definição segue que se F é diferenciável, então F_α é diferenciável Hukuhara para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $DF_\alpha(t) = [F'(t)]^\alpha, \forall \in [0, 1]$ onde DF_α é a derivada de Hukuhara de F_α. No entanto, a recíproca nem sempre é verdadeira, pois a existência da diferença de Hukuhara $[x]^\alpha - [x]^\alpha, \alpha \in [0, 1]$ não implica na existência da $H-$diferença $x - y$.

Theorem 9. *[6] Seja $F : T \to \mathbb{E}^n$ satisfazendo:*

1. *para cada $t \in T, \exists \beta > 0$, tal que a $H-$diferença $F(t + h) - F(t)$ e $F(t) - F(t - h)$, existem para todo $0 \leq h < \beta$;*
2. *as multifunções $F_\alpha, \alpha \in [0, 1]$ são uniformemente Hukuhara diferenciáveis com derivada DF_α.*

Então F é diferenciável e a derivada é $DF_\alpha(t) = [F'(t)]^\alpha$.

Theorem 10. *[6] Seja $F : T \to E^1$ diferenciável e $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)], t \in [0, 1]$. Então f_α e g_α são diferenciáveis e $[F'(t)]^\alpha = [f'_\alpha(t), g'_\alpha(t)]$.*

Prova:
Tem-se $[F(t + h) - F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t + h) - f_\alpha(t), g_\alpha(t + h) - g_\alpha(t)]$. E, $[F(t) - F(t - h)]^\alpha = [f_\alpha(t) - f_\alpha(t - h), g_\alpha(t) - g_\alpha(t - h)]$. O resultado segue dividindo cada uma das expressões por h e calculando o limite para $h \to 0$.

3.2 Problema do Valor Inicial Fuzzy

Apresentado os conceitos básicos de cálculo diferencial e integral de multifunções fuzzy, estuda-se as interpretações possíveis para o PVIF.

Dado o Problema do Valor Inicial Fuzzy (PVIF)

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{7}$$

onde $f : T \times E^n \to E^n$, onde (E^n, D) é um espaço métrico completo.

Como interpretar (7)?

1. **Diferencial de Hukuhara:**[10] Neste contexto temos que a variável de estado x é fuzzy e portanto necessitamos do conceito de diferencial de uma função a valores fuzzy (aqui, consideraremos a derivada de Hukuhara). Este enfoque tem uma grande desvantagem, pois as soluções são processos fuzzy com diâmetros não decrescentes, conforme o Teorema 8.
   A seguir apresentamos o conceito de processo fuzzy estabelecido por Seikkala [20] para o espaço E^1 e que foi utilizado pelo autor para reescrever o problema (7) como sendo um sistema bidimensional de equações diferenciais ordinárias.

   Definition 16. *Dado $I = [0,t], t \in \mathbb{R}_+$ um intervalo real. Uma aplicação $X : I \longrightarrow E$ é denominado um processo fuzzy, cujo $\alpha-$ nível é dado por:*

   $$[X(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)], t \in I, \alpha \in [0,1].$$

   Da Definição (16), segue que :

   $$[X'(t)]^\alpha = [(x_1^\alpha(t))', (x_2^\alpha(t))'], 0 < \alpha \leq 1.$$

   Logo, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $X(t) \in E^1$, segue que $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é a extensão de Zadeh de f e:

   $$[\widehat{f}(X)]^\alpha = f([X]^\alpha). \tag{8}$$

   Logo, se $[X(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)]$, então (7) pode ser reescrito como:

   $$\begin{cases} (x_1^\alpha)'(t) = \ f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), x_1^\alpha(0) \\ (x_2^\alpha)'(t) = f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha), x_2^\alpha(0), \end{cases} \tag{9}$$

   para $t \in [0,T)$ e $\alpha \in [0,1]$, onde

   $$\begin{cases} f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = \ min\{f(x)/x \in [X]^\alpha\} \\ f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = max\{f(x)/x \in [X]^\alpha\}. \end{cases}$$

   Observe que o PVIF foi reduzido a um problema do valor inicial em $\mathbb{R}^2$.

2. **Família de Inclusões Diferenciais:** Hüllermeier [8] sugere que (7), onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E^n$ é uma multifunção fuzzy e $X_0 \in E^n$, pode ser reescrita como a família de inclusões diferenciais
$$\begin{cases} x'(t) \in [f(x(t))]^\alpha \\ x(0) \in \quad\ [X_0]^\alpha, \end{cases}$$
onde $[f(x)]^\alpha$ e $[X_0]^\alpha$ são os $\alpha-$níveis dos subconjuntos fuzzy $f(x)$ e X_0, respectivamente e $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
3. **Princípio de extensão:** Oberguggenberger e Pittschmann [23] estudam (7) para o caso em que os parâmetros (para os autores são os coeficientes e a condição inicial) são fuzzy. Os autores definem os operadores equação, restrição e solução para o problema
$$\begin{cases} x'(t) = f(x) \\ x(0) \ = x_0, \ x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{10}$$
e aplicam o princípio de extensão de Zadeh nos operadores para obter uma solução para (7). Além disso, eles estabelecem formalmente os conceitos de solução fuzzy e solução fuzzy componente por partes.
Utilizando a ideia proposta por Oberguggenberger e Pittschmann, Mizukoshi et al ([11]) obtém a solução de (10) e considera um aberto U em $\mathbb{R}^n$ tal que existe uma solução $x(\cdot, x_0)$ of (10) com $x_0 \in U$ no intervalo $[t_0, T]$, e para todo $t \in [t_0, T]$, $x(t, \cdot)$ é contínua sobre U. Então, pode-se definir o operador:
$$x_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
por $x_t(x_0) = x(t, x_0)$, a qual é a solução única de (10) e é contínua em relação à variável x_0.
Aplicando-se o Princípio de Extensão à L_t, tem-se a extensão
$$\widehat{x}_t : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n),$$
que é denominado a solução do (7), com condição inicial $X_0 \in \mathcal{F}(U)$.
Se o parâmetro for fuzzy, pode-se estudar de forma equivalente ao descrito para a condição inicial fuzzy, ver detalhes em ([11]).
Quando temos um PVIF onde o campo de direções é extensão fuzzy de um campo determinístico, então toda solução determinística possui pertinência 1, ou seja, a determinística é a preferida dentre as soluções fuzzy.
4. Recentemente, Gomes e Barros [3] estudaram (7) considerando que f seja uma função que indica a direção da variável estado X em um instante t qualquer. Neste contexto, considera-se duas interpretações: uma que pode ser composta de trajetórias com diferentes soluções crisp, associados a funções de pertinências a cada um deles; preencher com funções que para cada instante t está associado um subconjunto fuzzy e a solução é uma multifunção fuzzy.

Assim sendo, vimos que (7) admite formulações diferentes. Qual é a melhor interpretação? Ainda não se tem uma resposta definitiva a esta questão. Achamos que ela dependerá fortemente dos objetivos que desejamos atingir.

Aqui, considera-se o estudo do PVIF sem considerar a derivada Fuzzy num contexto mais geral, isto é, compara-se sob o ponto de vista da derivada de Hukuhara em relação a interpretação segundo Hullermeier e Oberguggenberger e Pitschmann.

4 Aplicações

Em uma mesma espécie a variação comportamental pode ser bastante acentuada quando considera-se seus elementos isoladamente. Entretanto, quando analisa-se os grupos destes indivíduos, a diversidade comportamental acontece em grau mais reduzido. Por exemplo, o conceito de predador pode estar carregado de subjetividade se olhar o potencial de cada indivíduo. Assim, uma presa com um determinado grau pode se tornar um predador em potencial sobre determinadas circunstâncias intrínsicas da espécie ou do ambiente em que a mesma vive. Sendo assim, o grau de predação é um fator determinante nesta situação, mas esta característica nem sempre pode ser mensurável. Neste caso temos a fuzicidade demográfica que é o análogo da estocasticidade demográfica (onde a variável de estado é a variável aleatória).

Neste caso, tanto nas equações diferenciais fuzzy como nas equações de diferenças fuzzy, as estruturas fuzzy podem ser introduzidas através da condição inicial fuzzy.

A seguir ilustra-se o conceito de fuziness demográfica, onde a condição inicial é um conjunto fuzzy em E^n.

Example 11. (Malthus contínuo)[14]: Suponhamos que a população obedeça a lei do crescimento Malthusiano, então

$$\begin{cases} U'(t) = aU(t) \\ U(0) = \quad U_0, \end{cases} \tag{11}$$

onde $U_0 \in E^1$ e $a \in \mathbb{R}$.

Logo, se os $\alpha-$níveis de U são dados por $[U]^\alpha = [u_1^\alpha \; u_2^\alpha]$. Então pela derivada de Hukuhara, tem-se:

$$\left[\frac{dU}{dt}(t)\right]^\alpha = \left[\frac{du_1^\alpha}{dt}(t), \frac{du_1^\alpha}{dt}(t)\right], \alpha \in [0,1], t \in [0,T].$$

Logo, pelo Princípio de Extensão de Zadeh, tem-se que $f(t, U(t)) = aU(t)$ tem conjuntos níveis:

$[f(t,U(t))]^\alpha = [min\{au_1^\alpha(t), au_2^\alpha(t)\}, max\{au_1^\alpha(t), au_2^\alpha(t)\}], \forall\alpha \in [0,1], t \in [0,T]$.

Logo, tem-se os seguintes sistemas, considerando $a > 0$ (significado biológico) e $a < 0$, respectivamente.

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = au_1^\alpha(t), \text{ com } u_1^\alpha(0) = \; u_{01}^\alpha \\ (u_2^\alpha)'(t) = au_2^\alpha(t), \text{ com } u_2^\alpha(0) = u_{02}^\alpha, \end{cases} \tag{12}$$

para $a \geq 0$, e,

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = \ au_2^\alpha(t), \text{ com } u_1^\alpha(0) = u_{01}^\alpha \\ (u_2^\alpha)'(t) = au_1^\alpha(t), \text{ com } u_2^\alpha(0) = u_{02}^\alpha, \end{cases} \tag{13}$$

para $a < 0$, e para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Tem-se que as soluções de (12) e (13), serão dadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) = \ u_{01}^\alpha e^{at} \\ u_2^\alpha(t) = u_{02}^\alpha e^{at}, \end{cases} \tag{14}$$

e,

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) = \dfrac{1}{2}\left(u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha\right)e^{at} + \left(\dfrac{1}{2}u_{01}^\alpha - u_{02}^\alpha\right)e^{-at} \\ u_2^\alpha(t) = \dfrac{1}{2}\left(u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha\right)e^{at} + \frac{1}{2}\left(-u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha\right)e^{-at} \end{cases} \tag{15}$$

Assim sendo, a solução $U(t)$ de (11) tem $\alpha-$níveis dados por (14) para $a \geq 0$ e por (15) para $a < 0$.

Além disso, note que para $a \geq 0$, o nível $[U(t)]^1$, se afasta da solução determinística nula e para $a < 0$, as soluções tornam - se cada vez mais difusas, porém o nível $[U(t)]^1$ aproxima-se da solução nula se supormos que $[U_(0)]^1$ é um ponto.

Tem-se então que $diam(u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)) = |u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha|e^{at}$ para $a > 0$ e $diam(u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)) = u_{01}^\alpha e^{at}$ e para $a < 0$ $diam(u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)) = |u_{01}^\alpha - u_{02}^\alpha|e^{-at}, \forall\alpha \in [0, 1], t > 0$. Portanto, a solução se torna mais difusa quando t cresce, significando que a teoria de estabilidade conhecida até o momento não é mais válida.

Inclusões Diferenciais Fuzzy: Neste caso, o PVIF (7) é estudada como a seguinte família de inclusões diferenciais:

$$\begin{cases} U'(t) \in [aU(t)]^\alpha \\ U(0) \in [U_0(t)]^\alpha \end{cases} \tag{16}$$

onde $U : [0, T] \times \mathbb{R} \to E^n$ e U_0 é um número fuzzy. Tem-se que os conjuntos níveis são dados por $[U]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$ e $[U(0)]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]$,de maneira que (16) pode ser estudado considerando dois casos:

(i) U não é fuzzy e assim $[aU(t)]^\alpha$ é um conjunto crisp em E^1, isto é,

$$\begin{cases} U'(t) = [aU(t)]^\alpha \\ U(0) \in [U_0(t)]^\alpha \end{cases} \tag{17}$$

onde $U : [0, T] \times \mathbb{R} \to E^1$ e U_0 é um número fuzzy. Neste caso, para (17) tem-se que o conjunto solução e o conjunto de atingibilidade são dados pelos conjuntos níveis: $S([U(0)]^\alpha, \tau) = \{x(.) : x(t) \in [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]e^{at}, 0 \leq t \leq \tau\}$ e $A([U(0)]^\alpha, t) = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]e^{at}$. Neste caso, para $a < 0$, tem-se o diâmetro decrescente, como esperado.

(ii) a e úm número fuzzy e assim $[aU(t)]^\alpha$ é fuzzy, isto é,

$$\begin{cases} U'(t) \in [AU(t)]^\alpha \\ U(0) \in [U_0(t)]^\alpha \end{cases} \tag{18}$$

onde $U : [0,T] \times \mathbb{R} \to E^n$ e U_0, A são números fuzzy.

Neste caso, todas as soluções de (18) para cada $t \in [0,T]$ estarão entre as soluções inferior $(u_i(t))$ e superior $(u_s(t))$ definidas pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} u_i'(t) = min\{u(t) : u'(t) = a(t)u(t), a(t) \in [A]^\alpha, u_0 \in [U_0(t)]^\alpha\} \\ u_s'(t) = max\{u(t) : u'(t) = a(t)u(t), a(t) \in [A]^\alpha, u_0 \in [U_0(t)]^\alpha\} \end{cases} \tag{19}$$

Então as soluções são dadas por $u_i(t) = u_{01i}^\alpha e^{a_i^\alpha(t)}$ e $u_s(t) = u_{02s}^\alpha e^{a_s^\alpha(t)}$

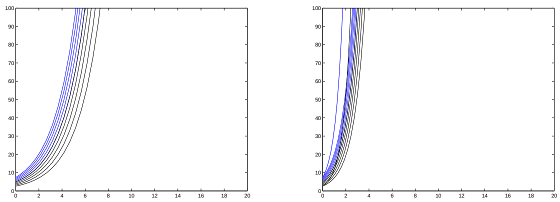


Figura 2. Conjunto Atingível com condição inicial fuzzy e condição inicial e parâmetro fuzzy- $a > 0$.

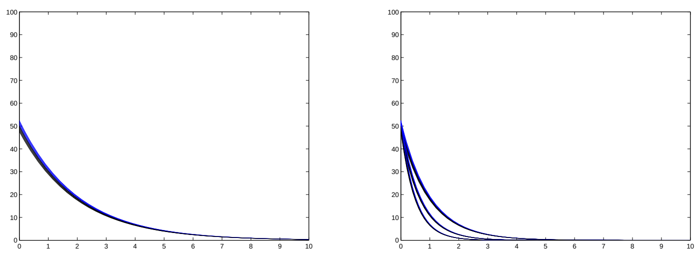


Figura 3. Conjunto Atingível com condição inicial fuzzy e condição inicial e parâmetro fuzzy- $a < 0$.

Extensão de Zadeh: Considere o modelo clássico de malthus

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{20}$$

Neste caso, a solução é $u(t) = u_0 e^{at}$. Se a condição inicial for um número fuzzy cujos $\alpha-$níveis são $[U(0)]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{01}^\alpha$, então a solução do PVIF é dado pela extensão da solução determínística , isto é, $[U(t)]^\alpha = [U_0 e^{at}]^\alpha = [u_{01}^\alpha e^{at}, u_{02}^\alpha e^{at}]$.

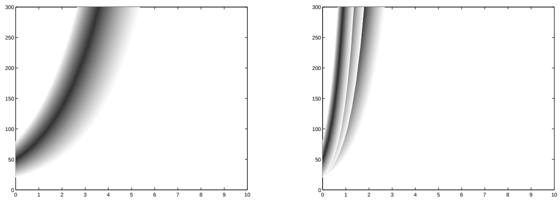


Figura 4. Solução via Extensão Zadeh com condição inicial fuzzy e condição inicial e parâmetro fuzzy - $a > 0$.

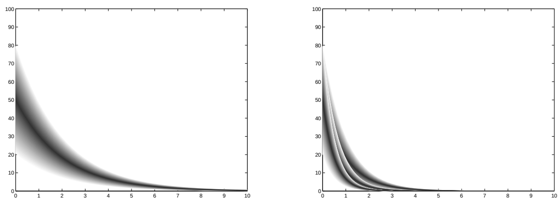


Figura 5. Solução via Extensão Zadeh com condição inicial fuzzy e condição inicial e parâmetro fuzzy - $a > 0$.

Example 12. O modelo de Verhulst afirma que o crescimento populacional depende das condições do meio em termos de sobrevivência e que poderá haver competição entre os indivíduos da mesma espécie.

$$\begin{cases} U'(t) = aU(t)(k - U(t)) \\ U(0) = U_0. \end{cases} , \tag{21}$$

onde X_0 é um número fuzzy com suporte positivo, $a, k \in \mathbb{R}$.

Lembre-se que a diferença de Hukuhara nem sempre está bem definida em $k - U(t)$ se $U(t)$ for um processo fuzzy, Neste caso, utiliza-se a diferença usual (veja mais detalhes em ([3]). Logo, se $f(t, U(t)) = aU(t)(k - U(t))$, então os $\alpha-$níveis são dados por:

$[f(t, U(t))]^\alpha = f(t, [U(t)]^\alpha) = [min\{P\}, max\{P\}]$, onde
$P = \{au_e^\alpha(k - u_e^\alpha), au_e^\alpha(k - u_d^\alpha), au_d^\alpha(k - u_e^\alpha), au_d^\alpha(k - u_d^\alpha)\}$.
Logo,
$[f(t, U(t))]^\alpha = f(t, [U(t)]^\alpha) = [au_e^\alpha(k - u_d^\alpha), au_d^\alpha(k - u_e^\alpha)]$.
Então, o sistema (21) pode ser reescrito como o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} u_e'^\alpha(t) = au_e^\alpha(k - u_d^\alpha) \\ u_d'^\alpha(t) = au_d^\alpha(k - u_e^\alpha) \\ u_e^\alpha(0) = u_{0e}^\alpha, u_d^\alpha(0) = u_{0d}^\alpha \end{cases} \tag{22}$$

Neste caso, a solução poderá ser obtida utilizando algum método numérico.

Inclusões Diferenciais Fuzzy: Neste caso, o PVIF (7) é estudada como a seguinte família de inclusões diferenciais:

$$\begin{cases} U'(t) \in [aU(t)(k - U(t))]^\alpha \\ U(0) \in [U_0(t)]^\alpha \end{cases} \tag{23}$$

onde $U : [0,T] \times \mathbb{R} \to E^1$, U_0 é um número fuzzy e $a, k \in \mathbb{R}$.

Se U não for fuzzy, $[aU(t)(k - U(t))]^\alpha$ é um conjunto crisp em E^1, isto é,

$$\begin{cases} U'(t) = [aU(t)(k - U(t))]^\alpha \\ U(0) \in [U_0(t)]^\alpha \end{cases} \tag{24}$$

onde $U : [0,T] \times \mathbb{R} \to E^1$ e U_0 é um número fuzzy. Neste caso, para (17) tem-se que o conjunto solução e o conjunto de atingibilidade são dados pelos conjuntos níveis: $S([U(0)]^\alpha, \tau) = \left\{ u(t) = \dfrac{ku_0}{u_0 + (k - u_0)e^{-akt}} : u_0 \in [u_{0e}^\alpha, u_{0d}^\alpha], 0 \le t \le \tau \right\}$ e $A([U(0)]^\alpha, t) = \left\{ u(t) = \dfrac{ku_0}{u_0 + (k - u_0)e^{-akt}} : u_0 \in [u_{0e}^\alpha, u_{0d}^\alpha] \right\}$.

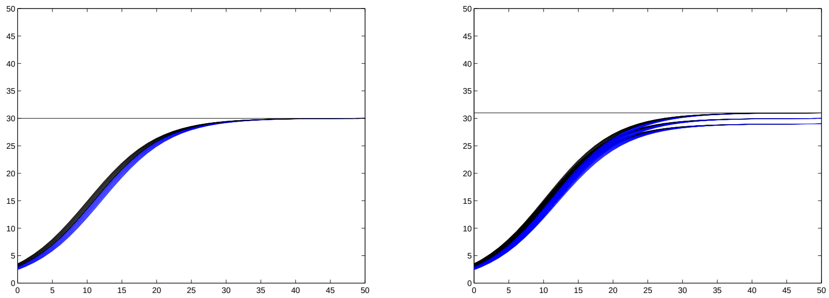


Figura 6. Conjunto Atingível com condição inicial fuzzy e condição inicial e parâmetro fuzzy.

Princípio de Extensão de Zadeh: Considere o PVI

$$\begin{cases} u'(t) = au(t)(k - u(t)) \\ u(0) = u_0. \end{cases}, \tag{25}$$

onde $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a, k, u_0 \in \mathbb{R}$. Neste caso, a solução de (25) é $u(t) = \dfrac{ku_0}{u_0 + (k - u_0)e^{-akt}}$. Logo, se a condição inicial, u_0, for incerta e dada por um número fuzzy, tem-se:

$$\begin{cases} u'(t) = au(t)(k - u(t)) \\ u(0) \in U_0. \end{cases}. \tag{26}$$

Se os $\alpha-$níveis da condição inicial são dados por $[U(0)]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{01}^\alpha$, então como $u(t, u_0)$ é contínua em relação a $u_0 \in U_0$, então existe $\hat{u}(t, U_0)$ e seus $alpha-$níveis são dados por:

$$[\hat{u}(t, U_0)]^\alpha = u(t, [U_0]^\alpha) = \left\{ u(t) = \frac{ku_0}{u_0 + (k - u_0)e^{-akt}} : u_0 \in [U_0]^\alpha \right\}.$$

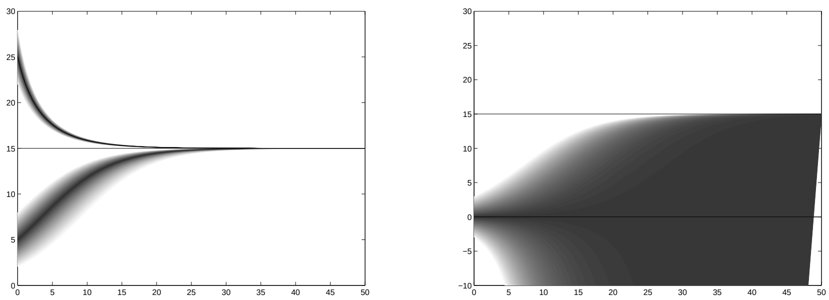


Figura 7. Solução via Extensão de Zadeh com Condição Inicial Fuzzy

Referências

1. Jean P. Aubin e A. Cellina, Differential Inclusions, Set-Valued Maps and Viability Theory, Springer-Verlag, Alemanha, 1984.
2. A. Kandel e W. J. Byatt, Fuzzy Differential Equation, Proc. Intern. Conf. on Cybernets and Society , 1978.
3. L. T. Gomes, On Fuzzy Differential Equations, Tese, Unicamp, IMECC, Campinas, 2014.
4. P. Diamond, Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations, IEEE Trans. Fuzzy System 7 (1999) 734-740.
5. L. C. Barros, Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Teoria e Aplicações. Tese, Unicamp, IMECC, Campinas, 1997.
6. V. Lakshmikanthan e R. Mohapatra, Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions, Taylor & Francis, London and New York, 2003.
7. V. Krivan e G. Colombo, A Non-Stochastic Approach for Modeling Uncertainty in Population Dynamics, Bulletin of Mathematical Biology, 60, 721–751, 1998.
8. E. Hullermeier, An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems, Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Bases Syst. 5 (1997) 117-137.
9. J. P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusions, Springer-Verlag, Berlin 1984.
10. O. Kaleva, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987) 301-317.
11. M. T. Mizukoshi, Y. Chalco-Cano, L. C. Barros and R. C. Bassanezi, Fuzzy differential equations and the extension principle, Information Sciences, v. 177, 3627-3635, 2007.
12. H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Applied, v . 64, 369-380, 1978.

13. L.A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its applications in approximate reasoning, Information Sci. (1975) 8:199-251, 9:301-357.
14. L . C. Barros e R. C. Bassanezi, Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática, Coleção IMECC, Textos Didáticos 5, Comissão de Publicações - IMECC, Campinas, 2006.
15. M. L. Puri and D.A. Ralescu,*Differentials for fuzzy functions* J. Math. Anal. Applied **91** (1983).
16. P. Diamond, Brief note on the variation of constants formula for fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 129 (2002) 65-71.
17. R. M. May, Stability and complexity im model ecosystems, Princeton University Press, New York, 1973.
18. B. Oksendal, Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer-Verlag, New York, 1992.
19. M. Turelli, Stochastic Community Theory: A Partially Guided Tour, Biomathematics, (1986)17: 321-323.
20. S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems, (1987)24: 309-330.
21. V. A. Baidosov, Fuzzy differential inclusions, PMM U.S.S.R., (1990)54:8-13.
22. Y. Chalco-Cano, V. A. de Oliveira e G. N. Silva, Description of the Attainable Sets of One-Dimensional Differential Inclusions, J. Optim Theory, to appear.
23. M. Oberguggenberger and S. Pittschmann, Differential equations with fuzzy parameters, Math. Mod. Systems, (1999)5:181-202.
24. T. Rzezuchowski and J. Wasowski, Differential equation with fuzzy Parameters via Differential Inclusions, J. Math. Analysis and Applications, (2001)255: 177-194.
25. J.J.Buckley, Solving fuzzy equattions, Fuzzy Sets and Systems, 50, 1-14,1992.
26. P. Diamond, Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations, IEEE Trans. Fuzzy Systems, v. 7, 734-740, 1999.
27. R. Fúller and T. Keresztfalvi, On generalization of Nguyen's theorem, Fuzzy sets and Systems, v. 41, 371-374, 1990.
28. M. Mizumoto and K. Tanaka, Advances in fuzzy set theory and applications, North-Holland, 153-164, Amsterdam-NewYork, 1979.
29. M. Rojas-medar, R. C. Bassanezi and H. Román-Flores, A generalization of the Minkowski embedding theorem and applications, Fuzzy Sets and Systems, v. 102, 263-269, 1999.
30. V. V. Goncharov, Elements of Multivalued and Nonsmooth Analysis, Mini-Coourse in Università di Verona, Italy, 2013.
31. A. A. Filippov, Differential Equations with Discontinuous Righthand Side, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, USA, 1988.