

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

**A DISTRIBUIÇÃO NORMAL ASSIMÉTRICA (*SKEW
NORMAL*) E SUAS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada ao
Departamento de Estatística da
Universidade Federal da Paraíba -
UFPB para a obtenção do grau de
Bacharel em Estatística

Por **NATÁLIA RODRIGUES GUEDES GONDIM**

Orientador: **JOAB DE OLIVEIRA LIMA**

João Pessoa - PB, Brasil

Julho/2011

Monografia de Projeto Final de Graduação sob o título “A Distribuição Normal Assimétrica (*Skew Normal*) e suas Aplicações”, defendida por Natália Rodrigues Guedes Gondim e aprovada em 08 de Julho de 2011 em João Pessoa no Estado da Paraíba, sendo apreciada pela banca examinadora constituída pelos Professores:

Prof. Joab de Oliveira Lima

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Hemílio Fernandes Campos Coêlho

Universidade Federal da Paraíba

Prof. Marcelo Rodrigo Portela Ferreira

Universidade Federal da Paraíba

Resumo

A simetria dos dados sempre foi premissa fundamental da Distribuição Normal. Mas, quando essa suposição não é verificada, as estimativas obtidas utilizando essa metodologia pode não ser a mais adequada.

A necessidade por um modelo que agregasse a assimetria dos dados tornou-se cada vez mais desejada e, desde a formalização da Distribuição Normal Assimétrica em 1985 por Azzalini, essa metodologia vem sendo utilizada onde o conjunto de dados possui assimetria. As definições, propriedades, métodos inferenciais, além de algumas aplicações praticas, serão apresentadas e discutidas neste trabalho.

Esse trabalho, do ponto de vista didático e acadêmico, servirá, sobretudo, para ajudar a disseminar e popularizar essa ferramenta estatística.

Palavras-chave: Distribuição Normal Assimétrica, Método dos Momentos e da Máxima Verossimilhança.

Abstract

The symmetry of the data has always been fundamental premise of the Normal Distribution. But when this assumption is not verified, the estimates obtained using this method depending on the degree of asymmetry of the data may be inconclusive.

The need for a model that would comprise the asymmetry of the data has become increasingly desired and finally in 1985 Azzalini introduced the Skew Normal Distribution. The definitions, properties, methods, inferential, and some practical applications will be presented and discussed in this work.

This document, in terms of teaching and academic, will serve mainly to help disseminate and popularize this promising statistical tool.

Keywords: Skew Normal Distribution, Method of Moments and Maximum Likelihood.

Dedico esta monografia a meu querido e amado
primo Edson de Melo Romão Neto (*in memoriam*).

Agradecimentos

A Deus, Jesus Cristo e Maria Santíssima, por tudo.

A minha grande família: meu pai Antonio, minha mãe Edlene, e meus irmãos Antonio, José Edson e Felipe, pessoas que tanto amo.

Aos meus demais familiares e, especialmente, aos meus tios José Orlando e Silvonete por me acolherem durante todo esse tempo de estudo em sua casa, o meu mais profundo e sincero obrigada.

A meu noivo e há poucos dias meu futuro marido, Rodrigo.

Ao Professor Dr. Joab de Oliveira Lima pela orientação, apoio e dedicação para a construção deste trabalho.

Aos professores Hemílio Fernandes Campos Coêlho e Marcelo Rodrigo Portela Ferreira por terem aceitado o convite para a banca examinadora.

A todos os meus amigos de graduação e em especial: Thaís, Ísis, Suane, Tiê, Paola, Julice, Abner, Jefferson, Tadeu e Telmo.

A todos os meus professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

Lista de Símbolos

μ	Média da população
\bar{x}	Média da amostra
S	Desvio padrão da amostra
n	Tamanho da amostra
λ	Parâmetro que controla a assimetria da Distribuição normal
δ	Valor aleatório entre (-1,1)
$\phi(\cdot)$	Função Densidade de Probabilidade
$\Phi(\cdot)$	Função de Distribuição Acumulada
$T(h, a)$	Função estudada por Owen
$SN(\lambda)$	Distribuição Normal Assimétrica Padrão com parâmetro de assimetria λ
$SN(\mu, \sigma, \lambda)$	Distribuição Normal Assimétrica com parâmetro de assimetria λ , parâmetro de locação μ e parâmetro e escala σ
$HN(0,1)$	Distribuição Half-Normal
$N(0,1)$	Distribuição Normal Padrão
χ_1^2	Distribuição Qui-Quadrado com um grau de liberdade
$M(t)$	Função Geradora de Momentos
$E(Y)$	Média de Y
$Var(Y)$	Variância de Y
γ_1	Coefficiente de Assimetria
γ_2	Coefficiente de Excesso de Curtose

$Z \xrightarrow{D} HN(0,1)$ Variável aleatória Z converge em distribuição para uma variável aleatória Half-Normal.

Sumário

1. Introdução	9
2. Objetivos.....	10
2.1. Objetivo Geral	10
2.2. Objetivos Específicos	10
3. Materiais e Métodos	11
3.1. Definição	11
3.2. Propriedades	15
3.3. Parâmetros de Localização e Escala	19
3.3.1. <i>Propriedades</i>	20
3.4. Geração de uma Distribuição Normal Assimétrica.....	22
3.5. Inferência sobre os Parâmetros da Distribuição Normal Assimétrica.....	24
3.5.1. <i>Método da Máxima Verossimilhança</i>	24
3.5.2. <i>Método dos Momentos</i>	26
4. Aplicações Práticas.....	32
4.1. Aplicação 1	32
4.2. Aplicação 2	32
4.3. Aplicação 3	33
4.4. Aplicação 4	33
4.5. Aplicação 5	33
4.6. Aplicação 6	34
5. Considerações Finais e Sugestões de Trabalhos Futuros	35
6. Referências Bibliográficas	36
7. ANEXO I: Programa para a Geração de uma amostra aleatória de uma Distribuição Normal Assimétrica	38

1. Introdução

A Distribuição Normal é a Distribuição de probabilidade mais utilizada para o tratamento e estudo de dados contínuos. A simetria dos dados amostrais é uma das suposições teóricas importantes para considerá-los como normalmente distribuídos. Porém, em diversas áreas do conhecimento, o afastamento da simetria limita bastante a aplicação das principais técnicas estatísticas ou torna os resultados inconclusivos.

Uma solução alternativa para resolver os problemas de assimetria dos dados tem sido o uso de transformação de variáveis. Uma consequência imediata do uso de variáveis transformadas é que as conclusões que serão obtidas se referirão tão somente às observações da variável modificada quando, na verdade, o que se deseja é uma conclusão para a variável na sua escala original.

Foram essas limitações e a busca por um modelo mais flexível aos dados que motivou Azzalini (1985) a criar a Distribuição Normal Assimétrica (*Skew-normal*). A Distribuição Normal Assimétrica é, na verdade, uma generalização da Distribuição Normal tradicional, em que existe um parâmetro que controla o grau de assimetria da Distribuição, o parâmetro λ . Para $\lambda=0$, a Distribuição Normal Assimétrica transforma-se em uma Distribuição Normal tradicional.

Portanto, a proposta dessa monografia é apresentar e demonstrar as principais propriedades e características que envolvem a Distribuição Normal Assimétrica.

2. Objetivos

2.1. Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo geral apresentar e discutir as principais características analíticas e inferenciais, bem como algumas aplicações abordando a Distribuição Normal Assimétrica.

2.2. Objetivos Específicos

Além do objetivo geral, pretende-se, ainda, nessa monografia, desenvolver as seguintes tarefas:

- a) Demonstrar as principais propriedades da Distribuição Normal Assimétrica;
- b) Apresentar as formas analíticas dos parâmetros de locação e escala da Distribuição Normal Assimétrica;
- c) Apresentar as inferências sobre os parâmetros da Distribuição Normal Assimétrica;
- d) Construir um programa para a geração de valores da Distribuição Normal Assimétrica.

3. Materiais e Métodos

Neste capítulo será apresentada, discutida e desenvolvida toda a teoria sobre da Distribuição Normal Assimétrica. Apesar de ser ainda pouco conhecida no Brasil, a Distribuição Normal Assimétrica ou *Skew Normal* tem sido amplamente utilizada nos mais diversos problemas práticos em que, tradicionalmente, se emprega a Distribuição Normal clássica.

3.1. Definição

Uma variável aleatória Z tem Distribuição Normal Assimétrica Padrão univariada com parâmetro de assimetria λ , denotada por $SN(\lambda)$, se sua densidade for dada por:

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z), \quad z \in \mathfrak{R}, \quad (1)$$

em que λ é uma constante em \mathfrak{R} , e $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ denotam, respectivamente, a função densidade de probabilidade (*fdp*) e a função de Distribuição acumulada (*fda*) da Distribuição Normal padrão $N(0,1)$. Valores positivos (negativos) de λ indicam assimetria positiva (negativa) na densidade acima.

A figura 1 mostra o comportamento da função $f(z)$ para diferentes valores do parâmetro λ que define a assimetria da densidade, à esquerda ou à direita bem como a sua intensidade. Como já mencionado, nota-se que a Distribuição Normal padrão está incluída como caso particular da Distribuição Normal Assimétrica Padrão quando $\lambda = 0$. Além disso, observa-se também que o grau de assimetria da Distribuição se torna mais acentuada quando $\lambda \rightarrow -\infty$ ou $\lambda \rightarrow \infty$. De modo geral, o comportamento da Distribuição normal assimétrica é esboçado através de suas propriedades. Para o desenvolvimento dessas propriedades, é necessário construir a função de Distribuição acumulada da Distribuição Normal assimétrica padrão.

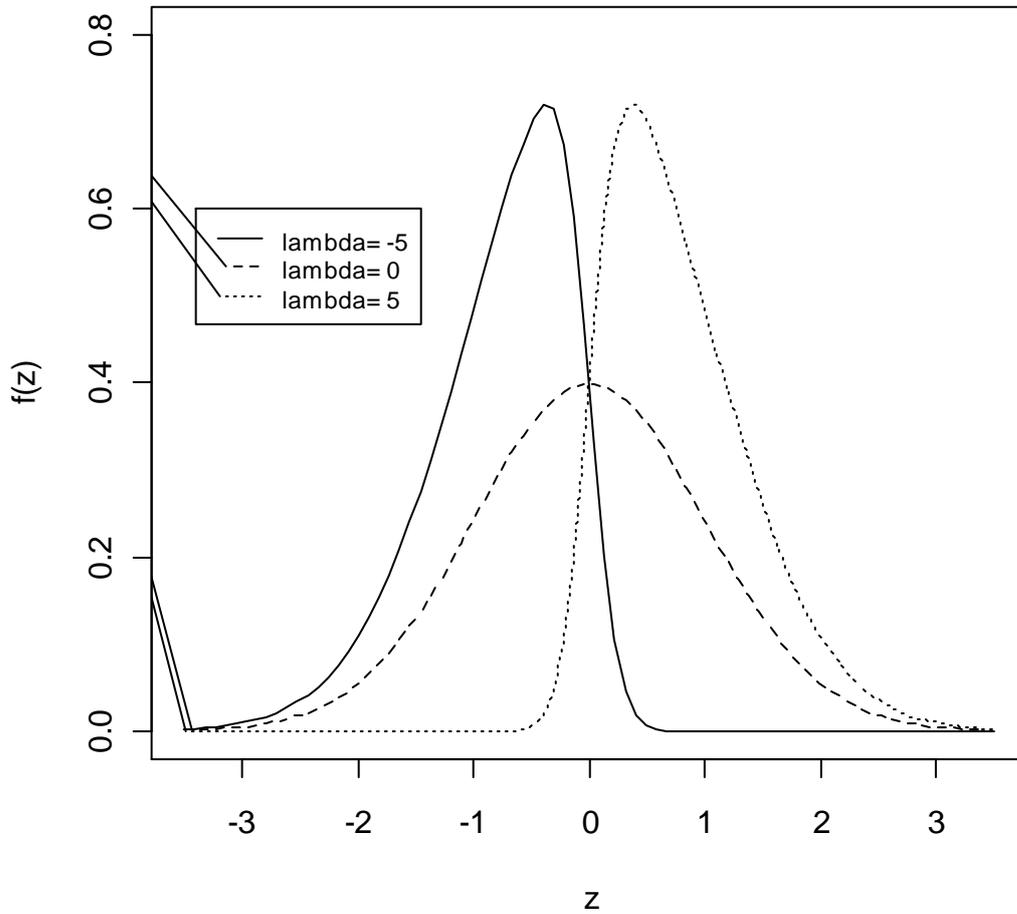


FIGURA 1: Densidade Normal Assimétrica Padrão para valores diferentes valores de λ .

A função de Distribuição acumulada (*fda*) da densidade dada por (1) denotada por $F(z; \lambda)$, é dada por:

$$F(z; \lambda) = 2 \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\lambda t} \phi(t) \Phi(u) du dt. \quad (2)$$

A região de integração é denotada por **A** na figura 2 para valores positivos de z e λ . Para a construção da função de Distribuição acumulada da densidade Normal assimétrica padrão, Azzalini(1985) usou a função $T(h, a)$, estudada por Owen (1956).

Para h e a positivos, $T(h, a)$ fornece a integral da densidade Normal padrão bivariada na região $x \geq h$, $0 \leq y \leq ax$, no plano (x, y) , ou seja,

$$T(h, a) = \int_h^{\infty} \int_0^{ax} \phi(x) \Phi(y) dy dx. \quad (3)$$

Com o auxílio da FIGURA 2, verifica-se que para valores positivos de z e λ ,

$$\begin{aligned} F(z; \lambda) &= 2 \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\lambda z} \phi(t) \Phi(u) dudt \\ &= 2 \left[\int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^0 \phi(t) \Phi(u) dudt - \int_z^{\infty} \int_0^{\lambda t} \phi(t) \Phi(u) dudt \right] \\ &= 2 \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^0 \phi(t) \Phi(u) dudt - 2 \int_z^{\infty} \int_0^{\lambda t} \phi(t) \Phi(u) dudt. \end{aligned} \quad (4)$$

Portanto,

$$F(z; \lambda) = \Phi(z) - 2T(z, \lambda), \quad (5)$$

em que $T(z, \lambda)$ é a integral de $\phi(t)\Phi(u)$ sobre a região **B** da figura 2.

Se $h_2 > h_1 > 0$, tem-se

$$T(h_2, a) = \int_{h_2}^{\infty} \int_0^{ax} \phi(x) \Phi(y) dy dx < \int_{h_1}^{\infty} \int_0^{ax} \phi(x) \Phi(y) dy dx = T(h_1, a) \quad (6)$$

Portanto $T(h, a)$ é decrescente em h . Tem-se ainda

$$-T(h, a) = -\int_h^{\infty} \int_0^{ax} \phi(x) \Phi(y) dy dx = \int_h^{\infty} \int_0^{-ax} \phi(x) \Phi(y) dy dx = T(h, -a), \quad (7)$$

$$T(-h, a) = \int_{-\infty}^{-h} \int_0^{ax} \phi(x) \Phi(y) dy dx = \int_h^{\infty} \int_0^{ax} \phi(x) \Phi(y) dy dx = T(h, a), \quad (8)$$

e

$$2T(h, 1) = \Phi(h) \Phi(-h). \quad (9)$$

Com as propriedades de $T(h, a)$ e observando a figura 2, tem-se que (5) também vale para valores negativos de z e λ , isto é, (5) é uma expressão geral da função da Distribuição acumulada da densidade dada por (1).

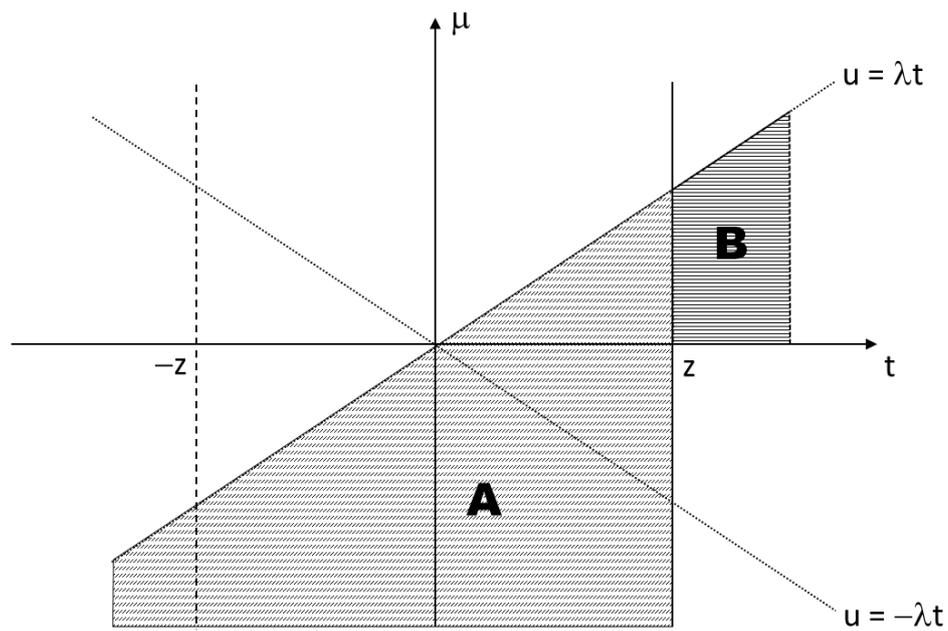


FIGURA 2: Representação da função $T(h, a)$

3.2. Propriedades

As propriedades da Distribuição Normal Assimétrica Padrão são importantes para interrelacioná-la com outras distribuições de probabilidades utilizadas na estatística. A seguir são listadas e demonstradas as principais propriedades.

a) A densidade $SN(0)$ é a $N(0,1)$.

Demonstração

Para $\lambda = 0$ tem-se que, $f(z) = 2\phi(z)\Phi(0) = 2\phi(z)\frac{1}{2} = \phi(z)$

ou seja, a Distribuição Normal Padrão é um caso particular da $SN(\lambda)$ quando $\lambda = 0$.

b) Se $Z \sim SN(\lambda)$, então $Y = |Z| \sim HN(0,1)$, em que $HN(0,1)$ representa a Distribuição denominada *Half-Normal* com densidade dada por $f(y) = 2\phi(y)I_{\{y>0\}}(y)$.

Demonstração

A variável aleatória Y é dada por

$$Y = \begin{cases} Z, & \text{se } Z \geq 0 \\ -Z, & \text{se } Z < 0. \end{cases}$$

Para $y < 0$ tem-se que $P(Y \leq y) = 0$. Para $y > 0$, por (5) e (8), se tem que

$$\begin{aligned}
P[Y \leq y] &= P[-y \leq Z < 0] + [0 < Z \leq y] \\
&= \{F(0, \lambda) - F(-y, \lambda)\} + \{F(y, \lambda) - F(0, \lambda)\} \\
&= \{[\Phi(0) - 2T(0, \lambda)] - [\Phi(-y) - 2T(-y, \lambda)]\} \\
&\quad + \{[\Phi(y) - 2T(y, \lambda)] - [\Phi(0) - 2T(0, \lambda)]\} \\
&= \Phi(0) - 2T(0, \lambda) - \Phi(-y) + 2T(-y, \lambda) \\
&\quad + \Phi(y) - 2T(y, \lambda) - \Phi(0) + 2T(0, \lambda) \\
&= \Phi(y) - \Phi(-y) + 2T(y, \lambda) - 2T(-y, \lambda) \\
&= \Phi(y) - \Phi(-y).
\end{aligned}$$

Derivando $P[Y \leq y]$ em relação à y ($y > 0$) tem-se

$$\frac{\partial P[Y \leq y]}{\partial y} = \phi(y) - (-1)\phi(-y) = \phi(y) + \phi(-y) = \phi(y) + \phi(y) = 2\phi(y).$$

E para concluir, basta definir

$$f_Y(0) = \phi(0).$$

c) Se $Z \square SN(\lambda)$, então quando $\lambda \rightarrow \infty$, $Z \xrightarrow{D} HN(0, 1)$.

Demonstração

Se $Z \square SN(\lambda)$, então sua densidade é dada por:

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z).$$

Quando $Z < 0$ tem-se que $\Phi(\lambda z) \rightarrow 0$ e, portanto $f(z) \rightarrow 0$.

Para $Z = 0$ tem-se que $f(0) = \phi(0) \forall \lambda$. Para $Z > 0$ nota-se que $\Phi(\lambda z) \rightarrow 1$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, o que resulta em $f(z) \rightarrow 2\phi(z)$, quando $\lambda \rightarrow \infty$.

d) Se $Z \sim SN(\lambda)$, então $-Z \sim SN(-\lambda)$.

Demonstração

$$f(-z) = 2\phi(-z)\Phi[\lambda(-z)] = 2\phi(z)\Phi(-\lambda z).$$

e) Se $Z \sim SN(\lambda)$, então a *fdp* de Z é unimodal e $\log f(z)$ é uma função côncava.

f) $1 - F(-z, \lambda) = F(z, -\lambda)$.

Demonstração

Por (5), (8) e (7) mostra-se que

$$\begin{aligned} 1 - F(-z; \lambda) &= 1 - [\Phi(-z) - 2T(-z, \lambda)] \\ &= 1 - [\Phi(-z) - 2T(z, \lambda)] \\ &= 1 - \Phi(-z) + 2T(z, \lambda) \\ &= 1 - \Phi(-z) - 2[-T(z, \lambda)] \\ &= \Phi(z) - 2T(z, -\lambda) \\ &= F(z; -\lambda) \end{aligned}$$

g) $F(z,1) = \{\Phi(z)\}^2$.

Demonstração

Por (5) e (9) mostra-se que

$$\begin{aligned}
 F(z;1) &= \Phi(z) - 2T(z,1) \\
 &= \Phi(z) - \Phi(z)\Phi(-z) \\
 &= \Phi(z)[1 - \Phi(-z)] \\
 &= \Phi(z)\Phi(z) \\
 &= [\Phi(z)]^2
 \end{aligned}$$

h) Se $Z \square SN(\lambda)$ então $Z^2 \sim \chi_1^2$.

Demonstração

Seja $Y = Z^2$ e, pela função inversa, tem-se que $Z = \pm Y^{1/2}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Então, pela

propriedade (d) do item 3.2, obtém-se

$$\begin{aligned}
 f_z(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \Phi\left(\lambda y^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \Phi\left(-\lambda y^{\frac{1}{2}}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \left[\Phi\left(\lambda y^{\frac{1}{2}}\right) + \Phi\left(-\lambda y^{\frac{1}{2}}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \left[\Phi\left(\lambda y^{\frac{1}{2}}\right) + 1 - \Phi\left(\lambda y^{\frac{1}{2}}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}.
 \end{aligned}$$

3.3. Parâmetros de Localização e Escala

Uma variável aleatória Y tem Distribuição Normal Assimétrica, denotada aqui por $Y \square SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$, com parâmetro de assimetria λ , parâmetro de localização μ e parâmetro de escala σ ($\sigma > 0$) se sua densidade é dada por:

$$f(y) = 2 \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right), \quad y \in \mathfrak{R} \quad (10)$$

em que $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ denotam respectivamente, a função de probabilidade e a função de Distribuição acumulada da Distribuição Normal Padrão.

Qualquer combinação linear, como por exemplo, $Y = \mu + \sigma Z$, de uma variável aleatória Normal Assimétrica Padrão $Z \square SN(\lambda)$, também terá Distribuição Normal Assimétrica $Y \square SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$.

Demonstração

A densidade de Z é dada por:

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z).$$

Escrevendo Z em função de Y temos que

$$\frac{Y - \mu}{\sigma} = Z \implies \left| \frac{\partial Z}{\partial Y} \right| = \frac{1}{\sigma}.$$

Portanto, a densidade de Y é dada por:

$$f(y) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{Y - \mu}{\sigma}\right).$$

Nas propriedades a seguir, será considerado $Y \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$.

3.3.1. Propriedades

a) $Y_1 = a + bY \sim SN(a + b\mu, b^2\sigma^2, \lambda)$ para a e b reais.

Demonstração

A densidade de Y é dada por:

$$f(y) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{y-\mu}{\sigma}\right).$$

Escrevendo Y em função de Y_1 obtém-se:

$$\frac{Y_1 - a}{b} = Y \Rightarrow \left| \frac{\partial Y}{\partial Y_1} \right| = \frac{1}{b}.$$

Logo, a densidade de Y_1 pode ser escrita como:

$$f(y_1) = \frac{2}{b\sigma} \phi\left(\frac{y_1 - (a + b\mu)}{b\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{y_1 - (a + b\mu)}{b\sigma}\right).$$

b) A função geradora de momentos de Y_1 é dada por:

$$M(t) = 2 \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \Phi\left(\delta \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right), \quad \text{em que} \quad \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

c) A média de Y é dada por: $E(Y) = \mu + \sigma\delta\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

d) A variância de Y é dada por: $Var(Y) = \sigma^2\left[1 - \frac{2}{\pi}\delta^2\right]$

e) O terceiro momento e o coeficiente de assimetria de Y são dados respectivamente por:

$$E(Y^3) = \mu^3 + 3\mu^2\sigma\delta\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 3\mu\sigma^2 + 3\sigma^3\delta\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sigma^3\delta^3\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta^3\left[\frac{4}{\pi} - 1\right]\left[1 - \frac{2}{\pi}\delta^2\right]^{-3/2},$$

γ_1 é o coeficiente de assimetria que caracteriza como e quanto à Distribuição se afasta da suposição de simetria da Normal e assume valores no intervalo $(-0,99527 ; 0,99527)$. Para mais detalhes consultar Pewsey (2000) e Branco e Arellano-Valle (2004).

f) O coeficiente de excesso de curtose γ_2 , que representa o formato da Distribuição quanto ao seu achatamento, é expresso por:

$$\gamma_2 = \frac{8}{\pi^2}(\pi - 3)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \pi^2}}\right)^4\left(1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^{-2},$$

e assume valores no intervalo $(0 ; 0,86869)$, (Azzalini, 1985).

3.4. Geração de uma Distribuição Normal Assimétrica

Para se obter a classe de distribuições normais assimétricas faz-se uso de uma Distribuição Normal bivariada ou de uma Normal multivariada. As formas de geração utilizando o caso bivariado são a representações de Henze (1986), construídas por condicionamento e estatísticas de ordem. A versão de Cartinhour (1990) e Arellano-Valle e Azzalini (2006) utilizam o caso multivariado, que não é o foco do nosso trabalho.

A representação de Henze consiste em construir a Distribuição Normal Assimétrica como uma combinação linear de variáveis aleatórias independentes e este método é muito eficiente, pois facilita muito a parte de simulação, uma vez que, a partir dessa representação, pode-se implementar facilmente algoritmos computacionais para a geração de amostras.

Para a implementação desse algoritmo, considere $X_0 \sim N(0,1)$ e $X_1 \sim N(0,1)$ independentes e $\delta \in (-1,1)$ e $Z = \delta |X_0| + \sqrt{1-\delta^2} X_1$. Então $Z \sim SN(\lambda)$, em que

$$\lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}.$$

Demonstração da Representação de Henze

Seja $W = |X_0|$. Então $W \sim HN(0,1)$, pela propriedade (b) do item 3.2.. Assim, tem-se:

$$|X_0| = W \quad \text{e} \quad X_1 = \frac{Z - \delta W}{\sqrt{1-\delta^2}}.$$

O jacobiano da transformação é dado por:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \\ \sqrt{1-\delta^2} & \sqrt{1-\delta^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
 f_z(z) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} f_{|x_0|}(w) f_{x_1}\left(\frac{z-\delta w}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) dw \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\delta^2}} \phi(w) \phi\left(\frac{z-\delta w}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) dw \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-\delta z)^2}{2(1-\delta^2)}} e^{-\frac{(z^2-\delta^2 z^2)}{2(1-\delta^2)}} dw \\
 &= \frac{2e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-\delta z)^2}{2(1-\delta^2)}} dw \\
 &= 2\phi(z) \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}^{\infty} \phi(w) dw = 2\phi(z) \Phi\left(\frac{\delta z}{\sqrt{1-\delta^2}}\right).
 \end{aligned}$$

O *software* R já possui um pacote implementado para a Distribuição Normal Assimétrica chamado “*sn*” contendo funções para a manipulação de distribuições de probabilidade Normal Assimétrica e t Assimétrica, incluindo os seus ajustes aos dados para os casos univariados e multivariados. O pacote pode ser obtido pelo endereço <http://cran.rproject.org/web/packages/sn/index.html> para ambas as plataformas Linux e Windows. Para efeito de ilustração, foi escrito um algoritmo personalizado com a representação de Henze em linguagem R para a geração desses valores para o caso univariado. Mais detalhes podem ser encontrados no Anexo I.

3.5. Inferência sobre os Parâmetros da Distribuição Normal Assimétrica

Os métodos da máxima verossimilhança e dos momentos são duas ferramentas clássicas para a inferência dos parâmetros do modelo Normal assimétrico. E são justamente essas duas técnicas que serão abordadas a seguir.

3.5.1. Método da Máxima Verossimilhança

Considere $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável aleatória $Z \sim SN(\lambda)$. A função de verossimilhança é dada por

$$L(\lambda; \underline{z}) = \prod_{i=1}^n 2\phi(z_i)\Phi(\lambda z_i). \quad (11)$$

Se λ é positivo e suficientemente grande, a probabilidade de $z_i > 0$ é razoavelmente grande, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Então, neste caso, $L(\lambda, \underline{z})$ é uma função monótona crescente em λ e, portanto, o estimador que maximiza a função de verossimilhança será infinito, o que levaria a inferir que $Z \sim HN(0,1)$. O mesmo raciocínio pode-se ter no caso em que λ é suficientemente distante à esquerda de zero. Liseo (1990) apresenta mais detalhes para outras amostras que levam ao mesmo problema.

Considere agora somente amostras em que o E.M.V. de λ é finito. Para obter o E.M.V. para λ , é preciso maximizar o logaritmo da função de verossimilhança, que é dado por:

$$l(\lambda) = \sum_{i=1}^n [\log [2\phi(z_i)] + \log \Phi(\lambda z_i)] \quad (12)$$

A primeira derivada é dada por:

$$i'(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{z_i \phi(\lambda z_i)}{\Phi(\lambda z_i)}. \quad (13)$$

em que as raízes dessa derivada podem ser obtidas numericamente.

Com a matriz de Informação de Fisher, que é dada por:

$$I_F(\lambda) = nE \left[\frac{Z^2 \phi^2(\lambda Z)}{\Phi^2(\lambda Z)} \right], \quad (14)$$

Obtém-se

$$I_F(\lambda) = n \int 2z^2 \phi(z) \frac{\phi^2(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} dz. \quad (15)$$

Seja $X = \mu + \sigma Z$, onde $Z \sim SN(\lambda)$. Temos então que $X \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$ e a matriz de informação de Fisher é dada por:

$$I_F(\mu, \sigma^2, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1 + \lambda^2 a_0}{\sigma^2} & \frac{E(Z) \frac{1 + 2\lambda^2}{1 + \lambda^2} + \lambda^2 a_1}{\sigma^2} & \frac{\sqrt{2/\pi} (1 + \lambda^2)^{3/2} - \lambda a_1}{\sigma} \\ \frac{E(Z) \frac{1 + 2\lambda^2}{1 + \lambda^2} + \lambda^2 a_1}{\sigma^2} & \frac{2 + \lambda^2 a_2}{\sigma^2} & -\frac{\lambda a_2}{\sigma} \\ \frac{\sqrt{2/\pi} (1 + \lambda^2)^{3/2} - \lambda a_1}{\sigma} & -\frac{\lambda a_2}{\sigma} & a_2 \end{pmatrix},$$

em que $a_k = E_Z \left[\frac{Z^k \phi(\lambda Z)}{\Phi(\lambda Z)} \right], k = 0, 1, 2.$

Um dos problemas encontrados nessa matriz é o fato dela ser singular quando $\lambda = 0$ e isso pode impedir que se avalie a existência da assimetria ao utilizar testes baseados na informação de Fisher, tais como o teste Wald. A maior dificuldade desse método é que estudos de simulação têm mostrado que o E.M.V. de λ pode ser infinito, ainda que seu verdadeiro valor seja finito. Uma solução para esta problema é a utilização do algoritmo EM que requer a obtenção de uma variável latente ou utilizar a parametrização centrada Azzalini (1985), da forma como foi proposto por Pewsey (2000).

3.5.2. Método dos Momentos

Os momentos de ordem par centrados na origem de uma variável aleatória $Z \square SN(\lambda)$ devido a propriedade (h) do item 3.2, são os mesmos da $N(0,1)$, enquanto que os de ordem ímpar são obtidos com o uso do resultado devido a Zacks (1981) que é enunciado no Lema 1.

Lema1: Seja $U \square N(0,1)$. Então

$$E \left\{ \Phi(aU + b) \right\} = \Phi \left(\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} \right).$$

em que a e b são reais.

A função geradora de momentos (*fgm*) de $Z \square SN(\lambda)$ é calculada por este lema, sendo dada por:

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= E(e^{tz}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Phi(\lambda z) dz \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2 + \frac{t^2}{2}\right) \Phi(\lambda z) dz \\
&= 2 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2\right) \Phi(\lambda z) dz.
\end{aligned}$$

Fazendo agora a transformação $u = z - t$, tem-se que $u + t = z$ e $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \rightarrow \partial u = \partial x$.

Segue, então, que

$$M_Z(t) = 2 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda[u+t]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

e devido ao Lema 1, mostra-se que:

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= 2 e^{\frac{t^2}{2}} E[\Phi(\lambda U + \lambda t)] \\
&= 2 e^{\frac{t^2}{2}} \Phi\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right) \\
&= 2 e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t),
\end{aligned}$$

em que $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$.

Derivando em relação a t , obtém-se $\frac{\partial M_Z(t)}{\partial t} = 2te^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t) + \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(\delta t)^2}{2}}$.

Assim, tem-se que $E(Z) = \left. \frac{\partial M_Z(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Obtendo, dessa forma, o segundo momento para calcular a variância,

$$\frac{\partial^2 M_z(t)}{\partial t^2} = 2 \left\{ e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t) + t \left[t e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\lambda t) + \delta^2 t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\delta t)^2}{2}} \right] \right\} \\ + \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ t e^{\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(\delta t)^2}{2}} \right\},$$

e $\frac{\partial^2 M_z(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 1.$

Portanto,

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 \\ = 1 - \delta^2 \frac{2}{\pi}.$$

Já para calcular o terceiro momento de Z centrado na origem, parte-se do fato de que

$$\frac{\partial^3 M_z(t)}{\partial t^3} = 2 t e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t) + 2 e^{\frac{t^2}{2}} \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{(\delta t)^2}{2}} \\ + 4 t e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t) + 2 t^3 e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t) + 2 t^3 e^{\frac{t^2}{2}} \delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\delta t)^2}{2}} \\ + 4 \delta^2 t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\delta t)^2}{2} + \frac{1}{2} t^2} + 2 \delta^2 t^2 (t - \delta^2 t) e^{-\frac{(\delta t)^2}{2} + \frac{1}{2} t^2} \\ + \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{(\delta t)^2}{2} + \frac{1}{2} t^2} + \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} t (t - \delta^2 t) e^{-\frac{(\delta t)^2}{2} + \frac{1}{2} t^2} \\ - \delta^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{(\delta t)^2}{2} + \frac{1}{2} t^2} - \delta^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} t (t - \delta^2 t) e^{-\frac{(\delta t)^2}{2} + \frac{1}{2} t^2}.$$

$$\text{Logo } \left. \frac{\partial^3 M_Z}{\partial t^3} \right|_{t=0} = 3\delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \delta^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Seja, então, $X = \mu + \sigma Z$, em que $Z \sim SN(\lambda)$. Diante disto, tem-se $X \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$, de modo que

$$E(X) = \mu + \sigma\delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 \left(1 - \delta^2 \frac{2}{\pi} \right).$$

e quando $\lambda=0$ tem-se que

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Neste modelo de densidade, portanto, μ é um parâmetro de locação e σ^2 é o parâmetro de escala e somente quando $\lambda=0$ é que a densidade é centrada em μ . Vale ressaltar que a variância é sempre menor que a variância do respectivo modelo de densidade Normal. E o terceiro momento de X centrado na origem é:

$$E(X^3) = \mu^3 + 3\mu^3 \sigma\delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} + 3\mu\sigma^2 + 3\sigma^3 \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sigma^3 \delta^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

O método dos momentos consiste em estimar os parâmetros populacionais através de sistemas de equações que envolvam os momentos centrais. Considere $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável aleatória $Z \sim SN(\lambda)$.

E os momentos amostrais centrados na origem são dados por:

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

Da mesma forma, os momentos amostrais centrados na média são dados por:

$$m_1 = 0,$$

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^k, \quad k = 2, 3, \dots,$$

em que $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = M_1,$

que é o momento amostral de ordem 1 centrado na origem, mais conhecido como média amostral. Para m_2 , usaremos a notação s^2 , estimador de máxima verossimilhança para a variância populacional. Branco e Arellano-Valle (2004) apresentam os resultados a seguir.

Sejam $X \sim SN(\mu, \sigma^2, \lambda)$ e Y_1, Y_2, \dots, Y_n uma amostra da variável padronizada

$$Y = \frac{X - \bar{x}}{s}.$$

Então, $Y \sim SN(\mu_Y, \sigma_Y^2, \lambda)$, em que

$$\mu_Y = \frac{\mu - \bar{x}}{s}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma^2}{s^2}.$$

Tem-se que $\bar{y} = 0$, $s_Y = 1$ e $m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^3$. Igualando os momentos amostrais aos momentos populacionais é obtido o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \mu_Y + \sigma_Y \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0 \\ \sigma_Y^2 \left[1 - \frac{2}{\pi} \delta^2 \right] = 1 \\ \mu_Y^3 + 3\mu_Y^2 \sigma_Y \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} + 3\mu_Y \sigma_Y^2 + 3\sigma_Y^3 \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sigma_Y^3 \delta^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} = m_3 \end{cases}$$

e deste sistema, obtém-se

$$\hat{\mu}_Y = -\frac{1}{s} \left(\frac{2}{4 - \pi} m_3 \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = 1 + \hat{\mu}_Y^2$$

e
$$\hat{\delta} = -\frac{\hat{\mu}_Y}{\hat{\sigma}_Y} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Portanto, os estimadores dos momentos de μ , σ^2 e λ são dados por:

$$\hat{\mu} = \bar{x} + s \hat{\mu}_Y,$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 (1 + \hat{\mu}_Y^2)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{1 - \hat{\delta}^2}},$$

sendo este último $|\hat{\delta}| < 1$, sob pena de $\hat{\lambda}$ não está definido.

Para $\delta = 0$, verifica-se que os estimadores encontrados não se comportam bem com o caso particular (Distribuição Normal), pois o estimador dos momentos $\hat{\sigma}^2$ superestima o parâmetro σ^2 e $\hat{\mu}$ sub ou superestima μ dependendo do sinal de $\hat{\mu}_Y$.

4. Aplicações Práticas

Serão apresentadas algumas aplicações práticas da Distribuição Normal Assimétrica em diferentes áreas de conhecimento, mas sem qualquer aprofundamento teórico e/ou metodológico. Tais aplicações mostram tão somente como a Distribuição Normal Assimétrica está sendo utilizada para resolver inúmeros problemas reais.

4.1. Aplicação 1

- **Título da Obra:** Inferência Bayesiana para um modelo de resposta ao item Normal assimétrico sob a parametrização centrada.
- **Área:** Educação
- **Objetivo:** Modelar os traços latentes utilizando a Distribuição Normal Assimétrica.
- **Metodologia Utilizada:** *Monte Carlo Markov Chain* (MCMC) e algoritmo Mhwgs.
- **Resultados/Conclusões:** A Distribuição dos traços latentes apresentou uma forte assimetria negativa e a conclusão foi que o modelo Normal assimétrico não apenas se encaixava bem aos dados como também trouxe estimativas melhores em comparação ao Normal simétrico.

4.2. Aplicação 2

- **Título da Obra:** Medidas de Modelos Psiquiátricos utilizando a Distribuição Normal Assimétrica.
- **Área:** Psicologia
- **Objetivo:** Investigar a influência da paternidade no desenvolvimento da criança.
- **Metodologia Utilizada:** Análise Multivariada
- **Resultados/Conclusões:** O ajuste do modelo Normal assimétrico melhorou substancialmente a bondade do ajuste em comparação ao modelo Normal simétrico.

4.3. Aplicação 3

- **Título da Obra:** Discussão sobre a aproximação da Binomial pela Normal assimétrica
- **Área:** Estatística
- **Objetivo:** Investigar a aproximação da Distribuição Binomial pela Normal assimétrica.
- **Metodologia Utilizada:** Simulação, Estatística Computacional.
- **Resultados/Conclusões:** As aproximações foram muito melhores que a Distribuição Normal simétrica.

4.4. Aplicação 4

- **Título da Obra:** Robustez da função discriminante de Fisher utilizando a curva Normal assimétrica.
- **Área:** Estatística
- **Objetivo:** Mostrar resultados melhores da função discriminante de Fisher com a metodologia assimétrica.
- **Metodologia Utilizada:** Análise Multivariada.
- **Resultados/Conclusões:** Efeitos significativos nas classificações.

4.5. Aplicação 5

- **Título da Obra:** Distribuições Multivariadas log-skew-elípticas com aplicações para dados de precipitação.
- **Área:** Meteorologia
- **Objetivo:** Encontrar um modelo mais flexível para analisar os dados de precipitação mensal dos EUA.
- **Metodologia Utilizada:** Análise Multivariada.
- **Resultados/Conclusões:** O modelo assimétrico apresentou uma pequena melhora nas estimativas em relação ao Normal simétrico e nos meses onde a assimetria era mais acentuada, o ajuste foi significativo.

4.6. Aplicação 6

- **Título da Obra:** Extensão bimodal com base na Distribuição Normal assimétrica para os dados de pólen.
- **Área:** Agricultura
- **Objetivo:** Aumentar a flexibilidade da Distribuição Normal assimétrica acrescentando um parâmetro adicional que pode levar para uma Distribuição bimodal.
- **Metodologia Utilizada:** Inferência Estatística.
- **Resultados/Conclusões:** A inclusão do parâmetro adicional melhorou as estimativas em comparação com a mesma distribuição sem este parâmetro.

5. Considerações Finais e Sugestões de Trabalhos Futuros

Este trabalho foi muito motivador por apresentar em sua essência uma característica que para mim não era inerente a uma Distribuição Normal, a assimetria. Responder às perguntas de que como isso era possível e como está sendo utilizado no meio acadêmico foi um trabalho exaustivo (já que não encontramos essa metodologia em livros e as que encontramos muitas são em outras línguas) e prazeroso à medida que meus questionamentos foram sendo esclarecidos.

Agora, depois de concluída essa etapa, o leque de possibilidades de aplicações da Distribuição Normal Assimétrica é muito extenso. Num primeiro momento, e de forma muito natural, sugere-se, por exemplo, estudar os modelos de Análise Discriminante modificados a partir da Distribuição Normal Assimétrica ou, talvez, construir modelos de Análise de Variância adaptados para dados tipicamente assimétricos.

6. Referências Bibliográficas

- [1] AZZALINI, A. (1985). A Class of Distribution which includes the Normal Ones. *Scandinavian Journal of statistics*. 12: 171- 178.
- [2] OWEN, D. B. (1956). Tables for Computing Bivariate Normal Probabilities. *Annals of Mathematics and Statistics*, 27, 1075-1090.
- [3] BRANCO, M. D.; ARELLANO–VALLE, R. (2004). Distribuições Elípticas Assimétricas. 16º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. Associação Brasileira de Estatística. Brasil.
- [4] PEWSEY, A. (2000). Problems of Inference for *Azzalini's Skew-Normal* Distribution. *Journal of Applied Statistics* 27, 859-870.
- [5] HENZE, N. (1986). A Probabilistic Representation of the *Skew-Normal* Distribution. *Scandinavian Journal of statistics*. 13, 271-275.
- [6] CARTINHOOR, J. (1990). One Dimensional Marginal Density Function of a Truncated Multivariate Normal Density Function. *Communication Statistics – Theory and Methods* 19, 197-203.
- [7] ARELLANO-VALLE, R. B.; AZZALINI, A. (2006). On the Unification of Families of *Skew-Normal* Distributions. *Scandinavian Journal of Statistics*, 33(3), 561-574.
- [8] LISEO, B. (1990). The *Skew-Normal* Class of Densities: Inferencial Aspects from a Bayesian Viewpoint. *Statistica*, 50, 59-70.
- [9] ZACKS, S. (1981). *Parametric Statistical Inference*. Oxford: Pergamon Press.
- [10] CAIO L.N. AZEVEDO, HELENO BOLFARINE, DALTON F. ANDRADE. (2010). Bayesian inference for a skew-normal IRT model under the centred parameterization.

- [11] N. COUNSELL, M. CORTINA-BORJA, A. LEHTONEN, A. STEIN. (2010).
Modelling psychiatric measures using Skew-Normal distributions.
- [12] CHIANG-HUI CHANG, JYH-JIUAN LIN, NABEDU PAL and MIAO-CHEN
CHIANG.(2009). Discussion on Skew-Normal Aproximation of a Binomial
Distribution.
- [13] MAJA SEVER, JARO LAJOVIC, and BORUT RAJER. (2005). Robustness of
the Fisher's Discriminant Function to Skew-Curved Normal Distribution.
- [14] YULIA V. MARCHENKO, and MARC G. GENTON. (2010). Multivariate
log-skew-elliptical distributions with applications to precipitation data.
- [15] HECTOR W. GOMEZA, DAVID ELAL-OLIVEROB, HUGO S. SALINASB
and HELENO BOLFARINE. (2008). Bimodal extension based on the skew-normal
distribution with application to pollen data.

7. ANEXO I: Programa para a Geração de uma amostra aleatória de uma Distribuição Normal Assimétrica

```
# Define a função que gera uma Amostra de tamanho n de uma Distribuição Normal
Assimétrica com parâmetro de assimetria  $\lambda$  (lamb)

normal_assimetrica <- function(n,lamb)
{
  X0 <- rnorm(n)
  X1 <- rnorm(n)
  Z <- vector("integer",n+1);
  Delta <- lamb/sqrt(1+ (lamb ^2))

  for(i in 1:n)
  {
    Z[i] <- Delta*abs(X0[i])+sqrt(1-(Delta^2))*X1[i]
  }

  Z[n+1] <- Delta
  return(Z)
}

# Exemplo de Aplicação
n <- 100000
lamb <- 6
z <- normal_assimetrica(n,lamb)
hist(z[1:n])
Delta <- z[n+1]
Delta
```

