UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

ANNA PAOLA NUNES VINÃS

UMA INTERFACE MATLAB-LINDO PARA SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

João Pessoa - PB
2011

ANNA PAOLA NUNES VINÃS

UMA INTERFACE MATLAB-LINDO PARA SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Graduação em Estatística, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento

JOÃO PESSOA – PB

2011

ANNA PAOLA NUNES VINÃS

UMA INTERFACE MATLAB-LINDO PARA SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

Aprovado em ______/______/______.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento
Orientador

____

Prof. Dr. João Agnaldo do Nascimento
Examinador

____

Prof.ª Dr.ª Renata Patrícia Lima Jerônymo
Examinadora

JOÃO PESSOA – PB
2011

Dedico este trabalho à todos aqueles que, de forma impulsora, me auxiliaram na elaboração e desenvolvimento deste trabalho. Em especial ao Professor e Orientador Doutor Roberto Quirino do Nascimento, pela paciência, incentivo e dedicação a mim dispensadas, na elaboração concreta das idéias, guiando os meus saberes e demonstrando a real importância deste trabalho.

Agradecimentos

À todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a consecução deste empreendimento.

Aos colegas componentes da Comissão Especial de Avaliação, por aceitarem a incumbência desta tarefa e pela contribuição à melhoria desta monografia.

Aos meus companheiros de sala de aula Abner Gomes da Costa , Adeilda Fernandes de Melo Lima, Ana Hermínia Andrade e Silva, Dannillo Fagner Vicente de Assis, Everlane Suane de Araújo, Isis Milane Batista de Lima, Jefferson da Rocha Augusto, João Paulo Nascimento Silva, Josemir Ramos de Almeida, Julice Suares Souza, Jussara Rodrigues de Sousa, Lerivan Ferreira da Silva, Lídia Dayse Araújo de Souza, Marcílio Regis Melo Silva, Natália Rodrigues Guedes Gondim, Rodrigo Cabral da Silva, Sadraque Enéas de Figuerêdo Lucena, Tadeu Rodrigues da Costa, Telmo Cristiano Gomes da Silva, Thiago Cavalcanti de Melo Lima, Thaiene Carneiro Santa Cruz, Tiê Dias de Farias, Tadeu Rodrigues da Costa, por todos os momentos maravilhosos de estudos.

Aos(s) grandes professores(as) e educadores(as) Mestre Abdoral de Souza Oliveira, Mestre Ana Flávia Uzeda dos Santos Macambira, Doutora Andréa Vanessa Rocha, Mestre Antônio Marcos Moreira, Mestre Eduardo Gonçalves dos Santos, Doutor Eufrásio de Andrade Lima Neto, Doutora Gilmara Alves Cavalcanti, Doutor Hemílio Fernandes Campos Coêlho, Doutor Jairo Rocha de Faria, Mestre João Batista Parente, Mestre Jozemar Pereira dos Santos, Doutor Luciano da Costa Silva, Doutor Lucídio dos Anjos Formiga Cabral, Mestre Marcelo Rodrigo Portela Ferreira, Doutor Neir Antunes Paes, Doutora Renata Patrícia Lima Jerônymo, Doutor Roberto Quirino do Nascimento, Doutor Sydney Gomes da Silva, Doutor Turíbio José Gomes dos Santos, Doutor Ulisses Umbelino dos Anjos.

Em especial a minha mãe Maria Madalena Nunes Bezerra, meu pai José Tranquilino da Silva, minha irmã Anna Rachel Bezerra e Silva, meu esposo Juan Pablo Nunes Vinãs que me incentivaram e acreditaram no meu potencial.

"Julgue seu sucesso pelas coisas que você teve que renunciar para conseguir."

Dalai Lama

Resumo:

Este trabalho propõe descrever e discutir conceitos básicos de uma metodologia denominada Análise Envoltória de Dados - doravante denominada AED. Para tanto, foram apresentadas diversas metodologias. Dentre elas podemos destacar: a importância da Programação Linear e sua aplicação na Pesquisa Operacional; a organização de um Problema de Programação Linear – PPL e suas respectivas suposições; a Teoria da Dualidade na Programação Linear, definindo seus modelos e teoremas. Todas estas metodologias foram importantes para a aplicabilidade do método AED e seus respectivos modelos clássicos multidimensionais CCR e BCC. Enfim, foi construído uma ferramenta computacional utilizando o software MATLABR2010a e o software LINDOapi60 para resolver alguns problemas existentes na literatura.

Palavras-chave: AED, PPL , CCR.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1. INTRODUÇÃO

A Análise Envoltória de Dados – doravante denominada AED é uma técnica não-paramétrica que emprega programação matemática para construir fronteiras de produção de unidades produtivas – DMUs que empregam processos tecnológicos semelhantes para transformar múltiplos insumos em múltiplos produtos. Tais fronteiras são empregadas para avaliar a eficiência relativa dos planos de operação executados pelas DMUs e servem, também, como referência para o estabelecimento de metas eficientes para cada unidade produtiva. AED foi desenvolvida para avaliar a eficiência de organizações cujas atividades não visam lucros ou para as quais não existem preços pré-fixados para todos os insumos e/ou todos os produtos. (Casado & Souza, p.2)

A Análise Envoltória de Dados ou Teoria da Fronteira, DEA (sigla inglesa para *Data Envelopment Analysis* ou *Frontier Analysis*) baseia-se em modelos matemáticos não paramétricos, isto é, não utiliza inferências estatísticas nem se apega a medidas de tendência central, testes de coeficientes ou formalizações de análises de regressão. A AED não exige a determinação de relações funcionais entre os insumos e os produtos, nem se restringe a medidas únicas, singulares dos insumos e produtos e permite utilizar variáveis discrionárias, instrumentais ou de decisão, variáveis não discrionárias ou exógenas (fixas), e categóricas (tipo *dummies*) em suas aplicações. (Ferreira & Gomes, 2009)

As técnicas estatísticas chamadas métodos não-paramétricos (ou de distribuição livre) que, como o próprio nome indica, são utilizadas principalmente quando não fazemos nenhuma alusão aos parâmetros da população amostrada e quando não se requer pressuposição rigorosa sobre a forma da distribuição de probabilidade dessa população. Geralmente, nessas técnicas, as variáveis envolvidas são apresentadas como postos (ranks) que são números indicando os itens amostrados ordenados, ou como valores discretos classificados em categorias e representados por freqüências. Os níveis de mensuração dessas variáveis são, na maioria das vezes, nominal ou ordinal. (Almeida, p.1)

A Análise Envoltória de Dados (DEA) é um processo para avaliar eficiências relativas de um conjunto de unidades produtivas semelhantes, a partir dos insumos utilizados e dos produtos resultantes da atividade (EHRLICH, 2005, p.2). Atividade essa que pode ser explicada de acordo com a quantidade de recursos utilizados (***inputs***) e de bens produzidos (***outputs***).

Segundo Charnes *et alii* (1994) a história da Análise Envoltória de Dados começa com a dissertação para obtenção de grau de Ph.D. de Edwardo Rhodes sob a supervisão de W.W. Cooper publicada em 1978 (Charnes, Cooper e Rhodes, 1978). O problema abordado na tese era o de desenvolver um método para comparar a eficiência de escolas públicas, levando em conta "outputs" como: escores aritméticos; melhoria de auto-estima medida em testes psicológicos; habilidade psicomotora; e "inputs" como: número de professores-hora e tempo gasto pela mãe em leituras com o filho. (Lins e Calôba, 2006)

O objetivo da tese foi desenvolver um modelo para estimar a eficiência técnica sem recorrer ao arbítrio de pesos para cada variável de "input" ou "output", e sem converter todas as variáveis em valores econômicos comparáveis. (Lins e Calôba, 2006)

O segundo modelo clássico AED considerou rendimentos de escala variáveis, e foi desenvolvido por Banker et al (1984). (Lins e Calôba, 2006)

A abordagem analítica rigorosa aplicada à medida da eficiência na produção teve origem com o trabalho de Pareto-Koopmans e Debreu (1951). A definição de Pareto-Koopmans para a eficiência técnica é que um vetor "input-output" é tecnicamente eficiente se e só se: nenhum dos "outputs" pode ser aumentado sem que algum outro output seja reduzido ou algum "input" necessite ser aumentado; nenhum dos "inputs" possa ser reduzido sem que algum outro "input" seja aumentado ou algum "output" seja reduzido. (Lins e Calôba, 2006)

Charnes *et alii* (1985) nos lembram da necessidade de tratar esta definição como um conceito relativo: a eficiência de 100% é atingida por uma unidade quando comparações com outras unidades relevantes não provêem evidência de ineficiência no uso de qualquer "input" ou "output". Este conceito nos permite diferenciar entre estados de produção eficientes e ineficientes, mas não permite medir o grau de ineficiência de um vetor ou identificar um vetor ou uma combinação de vetores eficientes com os quais comparar um vetor ineficiente. (Lins e Calôba, 2006)

Esta questão foi abordada por Debreu (1951), que introduziu uma medida radial de eficiência técnica: o coeficiente de utilização de recursos. Esta medida radial pretende buscar a máxima redução equiproporcional de todos os "inputs" ou a máxima expansão equiproporcional de todos os "outputs". A grande vantagem do uso deste coeficiente é que ele independe da unidade de medida de cada variável. A grande desvantagem é que um vetor "input-output" eficiente com base na medida radial de Debreu pode não ser eficiente com base na definição de Pareto-Koopmans. (Lins e Calôba, 2006)

Farrel estendeu o trabalho de Koopmans e Debreu de forma a incluir uma componente capaz de refletir a habilidade dos produtores em selecionar o vetor "input-output" eficiente considerando os respectivos preços. Esta componente foi denominada por eficiência alocativa. Entretanto, a dificuldade em medir estes preços de forma acurada, segundo Charnes e Cooper, foi um dos motivos que levou os trabalhos em AED a enfatizarem a medida de eficiência técnica. (Lins e Calôba, 2006)

Os modelos de programação linear provêem uma maneira elegante de, simultâneamente, construir a fronteira para uma dada tecnologia a partir do conjunto de observações e calcular a distância da fronteira a cada uma das observações individuais. (Lins e Calôba, 2006)

A formulação de problemas de medidas de eficiência como problemas de programação linear foi concebida pela primeira vez por Boles, Bressler, Seitz e Sitorus em 1966 para o caso linear em partes, segundo Fare *et alii* (1994). Entretanto, foi com o empenho de Charnes e Cooper que os modelos AED ganharam maior penetração, a partir do modelo original CCR (sigla para Charnes, Cooper e Rhodes). (Lins e Calôba, 2006)

O método AED pode ser utilizado para comparar um grupo de unidades de serviços a fim de identificar as unidades relativamente ineficientes, medindo a magnitude das ineficiências, e, pela comparação das unidades ineficientes com as eficientes, descobrir formas para reduzir as ineficiências. (MACEDO & BENGIO, p.3)

A definição da fronteira de produção é um ponto de partida interessante para a metodologia AED. Começa-se definindo fronteira de produção. Uma vez que produção é um processo no qual os “inputs” (insumos ou recursos) são utilizados para gerar “outputs” (produtos), a fronteira de produção (ou função fronteira de produção) pode ser definida a partir da máxima quantidade de “outputs” (produtos) que podem ser obtidos dados os “inputs” (insumos ou recursos) utilizados. (Lins e Calôba, 2006)

A Fronteira Eficiente (Análise da Envoltória de Dados: AED – Data Envelopment Analysis) tem sido objeto de estudos em Economia (Função de Produção), em Decisões Multicritério e em Programação Linear (Programação Multiobjetivos e Programação Fracionada). A idéia é analisar a eficiência de um processo produtivo relacionando o produto Y com o insumo X. (EHRLICH, 2005, p.2)

Também define-se DMU, ou Decision Making Unit, como uma firma, departamento, divisão ou unidade administrativa, cuja eficiência está sendo avaliada. O conjunto de DMUs adotados em uma análise AED deve ter em comum a utilização dos mesmos “inputs” e “outputs” e ser homogêneos. (Lins e Calôba, 2006)

Praticamente qualquer empresa que possua múltiplas unidades (denominadas DMUs) que operem de forma similar, e que esteja preocupada com a uniformização do desempenho das unidades, pode se beneficiar com a técnica. Exemplos reais de aplicações de grande sucesso podem ser encontrados em bancos de varejo, redes de postos de gasolina, hospitais, programas sociais, empresas de energia, entidades de ensino, lojas de departamento, redes de farmácia, classes de aula, times de futebol, agências dos correios etc. (Colin, 2007)

A eficiência de qualquer atividade é, sem sombra de dúvida, a decisão tomada. Para tanto utilizamos "Unidades que Tomam Decisões" (Decision Making Unit – DMU). A eficiência ou ineficiência está ligada à comparação entre DMUs.

No caso destas DMUs não apresentarem eficiência, serão abordados dois modelos básicos: primeiro, redução de recursos, mantendo constantes os produtos (orientação a *inputs* - ***CCR***); segundo, é fazendo o inverso (orientação a *outputs* - ***BCC***).

No que se refere à relação entre as variáveis, cada uma pode apresentar características completamente distintas, como renda monetária, em salários mínimos, emissões de gases de efeito estufa, em miligramas, e nível educacional, em taxas de alfabetização. Isto porque o método não requer a conversão em uma única unidade, mas preserva a análise no espaço multidimensional. (Lins e Calôba, 2006)

De acordo com (Lins e Calôba, 2006) pode-se destacar as seguintes características do Método AED:

- Difere dos métodos baseados em avaliação puramente econômica, que necessitam converter todos os "inputs" e "outputs" em unidades monetárias.
- Os índices de eficiência são baseados em dados reais (e não em fórmulas teóricas).
- É uma alternativa e um complemento aos métodos da análise da tendência central e análise custo-benefício.
- Considera a possibilidade de que os "outliers" não representem apenas desvios em relação ao comportamento "médio", mas possíveis *benchmarks* a serem estudados pelas demais DMUs.
- Ao contrário das abordagens paramétricas tradicionais, AED otimiza cada observação individual com o objetivo de determinar uma fronteira linear por partes ("piece-wise linear") que compreende o conjunto de DMUs Pareto-Eficiente.

Estas características conferem ao método uma potencialidade para resgatar a natureza essencialmente aplicada que estava presente nas origens da Pesquisa Operacional, sem, entretanto, a motivação da guerra presente naquela época. Isto ocorre porque AED é um método para apoio à decisão de natureza multicritério e, portanto, capaz de modelar melhor a complexidade do mundo real. (Lins e Calôba, 2006)

Segundo Seiford, os enfoques e interesses em AED são diversificados. Os estatísticos consideram esta técnica como um exercício em análise exploratória de dados, os econometristas, como uma técnica que estima uma função de produção empírica, os matemáticos, como uma metodologia para determinar soluções não dominadas em um problema multicritério. Os engenheiros industriais encontram em AED uma ferramenta para melhoria de produtividade. (Lins e Calôba, 2006)

Importantes contribuições recentes surgiram, no sentido de capacitá-lo a lidar com situações reais. Estas situações podem requerer maior interatividade e flexibilidade na busca do alvo ou *benchmarks*, através de modelos multiobjetivo, como proposto em Lins et al (2004). (Lins e Calôba, 2006)

1.1 Objetivo

O objetivo principal desta monografia é apresentar os conceitos básicos de uma metodologia denominada Análise Envoltória de Dados - AED e construir uma ferramenta computacional utilizando os softwares MATLABR2010a e LINDOapi60, no intuito de resolver alguns problemas existentes na literatura em vigor. O objetivo secundário é capacitar, não só o autor deste trabalho, como também todos os estudiosos do assunto, a utilizarem de forma eficiente a metodologia em questão.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1. Tipo de Estudo

Trata-se de uma revisão bibliográfica e implementação de uma interface utilizando os softwares MATLABR2010a e LINDOapi60 da seguinte forma: Os dados referentes ao modelo de AED são armazenados em um arquivo para serem manipulados pelo MATLAB em seguida o modelo de programação linear associado ao problema de AED é construído podendo ser resolvido pelo próprio MATLAB ou pelo LINDO, nossa preferência pelo LINDO justifica-se pelo fato de existirem modelos de AED discretos e que é nosso objetivo futuro estudá-los, uma vez que tais modelos não encontram resolvedores no MATLAB.

2.2. Local de Estudo

Foram feitas pesquisas em livros da biblioteca da Universidade Federal da Paraíba, em sites indexados, artigos científicos publicados na internet mais especificamente o portal da CAPES e implementações de modelos de programação linear em alguns programas como: Excel, Lindo e Matlab, realizado no LAPORTE (Laboratório de Pesquisa Operacional e Estatística).

3. Revisão da Literatura

3.1. Considerações gerais sobre AED

Segundo (Lins e Calôba, 2006) a Análise Envoltória de Dados é um método desenvolvido para tratar de problemas de avaliação de desempenho em organizações produtivas.

A Análise de Envoltória de Dados (do inglês *Data Envelopment Analysis* – DEA) é uma ferramenta matemática para a medida de eficiência de unidades produtivas (Mello et al, 2005).

Segundo EHRLICH (2005, p.2), "DEA é um processo para avaliar eficiências relativas de um conjunto de unidades produtivas (de bens ou serviços) semelhantes (pertencentes a um mesmo conjunto), a partir dos insumos utilizados e dos produtos resultantes da atividade".

De acordo com (Lins e Calôba, 2006) pode-se destacar as seguintes características do Método DEA (*Data Envelopment Analysis*):

- Difere dos métodos baseados em avaliação puramente econômica, que necessitam converter todos os "inputs" e "outputs" em unidades monetárias;
- Os índices de eficiência são baseados em dados reais (e não em fórmulas teóricas);
- É uma alternativa e um complemento aos métodos da análise da tendência central e análise custo-benefício;
- Considera a possibilidade de que os "outliers" não representem apenas desvios em relação ao comportamento "médio", mas possíveis *benchmarks* a serem estudados pelas demais DMUs;
- Ao contrário das abordagens paramétricas tradicionais, DEA otimiza cada observação individual com o objetivo de determinar uma fronteira linear por partes ("piece-wise linear") que compreende o conjunto de DMUs Pareto-Eficiente.

3.1.1. Benchmarcks

A Análise por Envoltória de Dados geralmente é utilizada para avaliar a eficiência relativa de cada unidade em relação às outras. Essa informação é importante porque permite que a administração da empresa "aprenda" com as DMU's mais eficientes e que a tecnologia utilizada para essa maior eficiência possa ser replicada nas DMU's menos eficientes. Portanto, a técnica em si serve mais para avaliar a eficiência das DMU's do que para resolver o problema de eficiência propriamente dito. Após conhecer a eficiência das DMU's, um outro trabalho deve ser realizado, com a finalidade de melhorar a eficiência das DMU's com pior desempenho. Dentro da Administração esse tipo de análise é convencionalmente chamado de "análise de *benchmarks*", ou "análise de melhores práticas". Embora ainda não haja uma teoria "consistente" sobre *benchmarks* como uma disciplina, grandes consultorias de gestão e empresas de uma forma geral têm boa parte de seu trabalho baseada em *benchmarks*. Além do *benchmark* "interno", a AED pode ser utilizada para a criação de *benchmarks* "externos", ou seja, avaliação de empresas com relação a competidores. (Colin, 2007)

Diferentemente de outras técnicas utilizadas na análise de *benchmarks*, em que os analistas/gerentes comparam, observam e identificam as melhores práticas, a AED ajuda esses interessados a identificar melhores práticas que são difíceis, muito complexas ou impossíveis de serem avaliadas pela simples observação, ou pelas técnicas convencionais de análise. (Colin, 2007)

De acordo com (Colin, 2007) em linhas gerais, a AED avalia problemas com múltiplos recursos (usados para gerar produtos e/ou serviços) e múltiplas saídas (produtos e serviços gerados) para cada unidade. A capacidade com que as DMU's conseguem gerar saídas para determinadas entradas define sua eficiência. Supõe-se que as DMU's menos eficientes podem melhorar sua eficiência até o limite das melhores DMU's, cuja eficiência é de 100%. Mais especificamente, a AED determina:

- A melhor prática – grupo de DMU's mais eficientes;
- As DMU's menos eficientes comparadas com as melhores práticas;
- A quantidade de recursos utilizados de forma improdutiva nas DMU's menos eficientes;
- Para cada uma das DMU's menos eficientes, o grupo das unidades de melhor prática que são mais parecidas com elas e que poderiam ser usadas como benchmarks.

3.1.2. Eficácia

De acordo com (Ferreira, 1988), seguem as definições:

- Eficácia: Qualidade ou propriedade de eficaz; eficiência.
- Efetividade: Qualidade de efeito; Atividade real. Resultado verdadeiro; Realidade, existência.

- Eficiência: Ação, força, virtude de produzir um efeito; eficácia.

É importante lembrar as definições de eficácia, efetividade e eficiência, para que se entenda bem o intuito do referido trabalho. Conforme MARINHO & FAÇANHA (2001), a eficácia refere-se à obtenção de resultados planejados em condições ideais, sem considerar os recursos empregados; a efetividade diz respeito à capacidade de promover resultados em termos de alcance e cobertura; e a eficiência é utilizar os recursos com dispêndio mínimo.

3.1.3. Eficiência

A eficiência está ligada à comparação entre DMUs. Com base nisso, podemos supor que a DMU eficiente será aquela com maior produtividade. Assim, a unidade mais produtiva é aquela cuja reta que a liga a origem tem o maior coeficiente angular possível. Existem duas formas básicas de uma unidade não eficiente tronar-se eficiente. A primeira é reduzindo os recursos, mantendo constante os produtos (orientação a inputs); a segunda é fazendo o inverso (orientação a outputs). (Mello et al, 2005).

A fronteira de produção (ou função fronteira de produção) pode ser definida a partir da máxima quantidade de “outputs” (produtos) que podem ser obtidos dados os “inputs” (insumos ou recursos) utilizados. (Lins e Calôba, 2006).

3.1.4. Produtividade

De acordo com (Ferreira, 1988):
- Qualidade ou estado de produtivo.

Conceito de produtividade (Mello et al, 2005):
- A razão entre o que foi produzido e o que foi gasto para produzir.

3.1.5. DMU “Unidades que Tomam Decisões” (do inglês Decision Making Unit)

Define-se DMU, ou Decision Making Unit, como uma firma, departamento, divisão ou unidade administrativa, cuja eficiência está sendo avaliada. O conjunto de DMUs adotados em uma análise AED deve ter em comum a utilização dos mesmos “inputs” e “outputs” e ser homogêneos. (Lins e Calôba, 2006)

Praticamente qualquer empresa que possua múltiplas unidades (denominadas DMUs) que operem de forma similar, e que esteja preocupada com a uniformização do desempenho das unidades, pode se beneficiar com a técnica. Exemplos reais de aplicações de grande sucesso podem ser encontrados em bancos de varejo, redes de postos de gasolina, hospitais, programas sociais, empresas de energia, entidades de ensino, lojas de departamento, redes de farmácia, classes de aula, times de futebol, agências dos correios etc. (Colin, 2007)

De acordo com Mello et al (2005), a eficiência nada mais é do que uma quantidade ligada ao quociente entre uma soma ponderada dos produtos e uma soma ponderada dos recursos. Para os pesos não serem arbitrários, e assim eliminarmos a subjetividade da análise, vamos permitir que cada DMU escolha os pesos mais apropriados, ou seja, aqueles que maximizem essa razão. Entretanto, isto não pode ser feito de forma totalmente livre, já que o resultado tem que ser uma eficiência, isto é, um número entre 0 e 1. Assim, impomos que os pesos que uma DMU escolhe, quando aplicados a ela mesma e às outras (no local de k DMUs) não podem dar um quociente superior à unidade. Estas considerações equivalem ao problema de programação matemática apresentado em (1).

$$\begin{aligned} &Maximizar\ \frac{uI_o}{vX_o} \\ &sujeito\ a \\ &\frac{uI_k}{vX_k} \leq 1, para\ todo\ k \end{aligned} \qquad (1)$$

A definição de Pareto-Koopmans para a eficiência técnica:

Um vetor “input-output” é tecnicamente eficiente se e só se:

- Nenhum dos “outputs” pode ser aumentado sem que algum outro output seja reduzido ou algum “input” necessite ser aumentado.
- Nenhum dos “inputs” possa ser reduzido sem que algum outro “input” seja aumentado ou algum “output” seja reduzido.

Segundo MILLER (1981,p.165), a eficiência técnica “requer que se utilize um processo de produção que não use mais insumos do que o necessário para um dado produto”.

De acordo com Creomar Baptista (2008), a Análise Envoltória de Dados calcula a eficiência de uma dada organização em relação àquela com melhor "*performance*" no interior de um grupo, sendo usada em geral para medir a eficiência de serviços governamentais, organizações não-lucrativas ou firmas do setor privado. Estas unidades individuais são chamadas de "Decision Making Units" (DMU's) e a maneira como são analisadas envolvem conceitos como:

a) **Eficiência técnica**, isto é, a maneira como diferentes insumos são empregados para obter produtos relativamente à melhor prática em uma dada amostra de DMU's. Melhor dizendo, dada a mesma tecnologia para todas as DMU's, não ocorre desperdício de insumos na produção de dada quantidade de produto (nesta situação, uma organização é dita tecnicamente eficiente);

b) **Eficiência alocativa**, ou seja, a minimização do custo de produção com a escolha apropriada de insumos para um dado nível de produto e um conjunto de preços dos insumos, assumindo que a organização já é tecnicamente eficiente;

c) **Eficiência de custos,** em outras palavras, a combinação de eficiência técnica e a alocativa. Uma organização só será eficiente neste sentido se for simultaneamente eficiente do ponto de vista técnico e alocativo.

3.2. Programação Linear

De todas as técnicas gerenciais à disposição hoje em dia, a Programação Linear (ou PL) é uma das mais poderosas. Usuários tradicionais da PL, como as indústrias petrolífera e de aviação, enxergam a técnica como uma condição fundamental para lucratividade e sobrevivência no longo prazo. Outras indústrias com aplicações menos tradicionais (como a farmacêutica, por exemplo) freqüentemente encontram na técnica fontes de vantagem competitiva duradora. (Colin, 2007)

Há um número gigantesco de aplicações que já foram realizadas, e muitas delas geraram economias na casa das centenas de milhões de dólares; algumas passaram a casa dos bilhões de dólares. Além dos casos de grandes economias, há uma outra infinidade de casos em que as aplicações geram economias menos substanciais, mas facilitam sobremaneira a vida do administrador. Quando um problema é resolvido com programação linear, há uma garantia relativamente grande (considerando que a modelagem e a solução sejam adequadas) de que não haverá uma solução melhor para ele. (Colin, 2007)

A Programação Linear (PL) caracteriza-se por utilizar métodos de cálculo baseados na execução repetida de operações relativamente simples, beneficiando-se do advento do computador. (Lins e Calôba, 2006)

Dois desenvolvimentos científicos concomitantes, no início deste século, estimularam o desenvolvimento da Programação Linear (PL): O primeiro iniciou-se em 1928, quando John Von Neuman publicou o teorema central da Teoria dos Jogos, que mais tarde foi formulada através da Programação Linear e interpretada à luz da teoria da dualidade. Em 1944, Von Neuman publicou *Theory of Games and Economic Behaviour*. A interação entre jogos e a economia encorajou um interesse maior na PL; O segundo desenvolvimento foi a análise insumo-produto (*input-output*), proposta por Leontief, em seu paper de 1936: *Quantitative input and output Relations in the Economic Systems of the United States*, um modelo matricial linear que posteriormente veio a ser utilizado sob a forma de um Problema de Programação Linear (PPL). (Lins e Calôba, 2006)

Nas décadas de 30 e 40 alguns problemas foram formulados sob a forma de restrições, e cresceu o interesse em obter um método geral para sua solução. O matemático e economista soviético Kantorovitch formulou e resolveu um PPL para organização e planejamento da produção em 1939. Em 1941, Hitchcock formulou o PPL do transporte, em 1945 Stigler formulou o PPL da Dieta. (Lins e Calôba, 2006)

A Pesquisa Operacional consolidou-se durante a 2ª Guerra, devido à necessidade de adequar as operações executadas por humanos aos novos armamentos desenvolvidos. As palavras “Pesquisa” e “Operacional” refletem a idéia de integrar, respectivamente, o caráter teórico e aplicado dos métodos de Pesquisa Operacional, entre os quais a Programação Linear. (Lins e Calôba, 2006)

Com a complexificação das atividades militares, era necessário integrar os diferentes objetivos e necessidades da indústria e dos “serviços” bélicos, os quais passavam a ser representados e quantificados através de modelos matemáticos. Um grupo de cientistas foi chamado pela força aérea americana para avaliar a viabilidade de aplicar técnicas matemáticas aos problemas de programação orçamentária e planejamento militar. George Dantzig era um dos membros deste grupo, e já havia proposto anteriormente que as inter-relações entre as atividades de uma grande organização fossem vistas como um modelo de PL, cuja solução ótima seria determinada através de uma função objetivo linear. Tais idéias levaram a força aérea a montar uma equipe de projeto sob o nome de SCOOP (*Scientific Computation of Optimal Programs*). (Lins e Calôba, 2006)

A análise das inter-relações entre as atividades de uma grande organização, explicitando os conflitos de objetivos entre os departamentos pode ser ilustrada na tabela 1. Os setores de produção e de vendas têm estratégias conflitantes quanto à diversificação da produção, ao passo em que o setor financeiro pretende uma política de estoques diferente da dos setores de produção e vendas. Entra em conflito também com o setor de pessoal quanto ao nível de produção. (Lins e Calôba, 2006)

Os diferentes objetivos e as estratégias, muitas vezes conflitantes dos setores típicos de uma grande organização, na época, foram modelados através de um PPL que representava as restrições referentes aos recursos disponíveis nos setores, e buscava maximizar o lucro resultante das receitas com vendas menos os custos com pessoal e estoques. (Lins e Calôba, 2006)

Tabela 1. Setores, objetivos e estratégias envolvendo Pesquisa Operacional

SETORES	OBJETIVOS	ESTRATÉGIAS
Produção	Mínimo custo de produção Máximo volume de bens	Linha de produção restrita e estoques elevados
Vendas	Máximo volume vendido Mínimo custo com vendas	Estoques elevados mas produção diversificada (aumento custo prod.)
Financeiro	Mínimo capital para determinados tipos de negócios	Redução de estoques. Produção variável
Pessoal	Máxima produtividade por empregado. Máxima motivação	Manter nível de produção constante p/ evitar demissões

Fonte: Projeto SCOOP

O projeto SCOOP começou em junho de 1947 e, antes do final do verão, Dantzig e sua equipe haviam desenvolvido não apenas um modelo matemático inicial do problema de PL generalizado, mas também um método de solução que foi denominado por método Simplex. (Lins e Calôba, 2006)

O interesse pela PL rapidamente difundiu-se entre matemáticos, ecomomistas e pessoal de PO. No verão de 1949, uma conferência sobre PL patrocinada pela Cowles Comission for Research in Economics resultou em trabalhos publicados no texto *Activity Analysis and Allocation*, contemplando as três principais áreas:

1. Aplicações militares.
2. Economia interindustrial baseada no modelo I-O de Leontief.
3. Relações entre a PL e os jogos de duas pessoas com soma zero.

Posteriormente, a ênfase deslocou-se para problemas encontrados em meio ambiente, transporte, energia, problemas sociais e área industrial. A coincidência com o desenvolvimento do primeiro computador de grande porte na Universidade de Pennsylvania em 1946 foi fundamental para que o simplex não se tornasse um método restrito ao interesse acadêmico. (Lins e Calôba, 2006)

Em 1951, Tucker obteve os primeiros resultados no desenvolvimento da teoria da dualidade e em 1952, Charnes e Lemke desenvolveram o simplex revisado, importante para a implementação computacional do simplex. (Lins e Calôba, 2006)

A primeira solução bem sucedida de PPLs de grande porte ocorreu em janeiro de 1952 no computador do National Bureau of Standards. Em 1953, os computadores passaram a ser produzidos em linha. Hoje, quase todos os computadores vêm com uma rotina de PL, sendo esta uma das ferramentas mais largamente utilizadas. (Lins e Calôba, 2006)

Embora muitos acreditassem que o simplex era a última palavra em algoritmos para resolver PPLs, um trabalho de Klee e Minty ilustrou, através de um exemplo patológico, que o algoritmo simplex pode apresentar um crescimento exponencial no tempo de computação (quando todos os vértices são pesquisados antes que se encontre a solução ótima). Um interesse pela busca de um provável algoritmo com tempo polinomial foi gerado. Este interesse era eminentemente acadêmico, porque na prática o algoritmo simplex exibe um tempo de computação polinomial de baixa ordem. (Lins e Calôba, 2006)

Em 1979, através do trabalho de Khachnian e em 1984, com o algoritmo de Karmarkar, os algoritmos de pontos interiores mostraram-se de complexidade polinomial. Entretanto, para problemas de grande porte, utilizam-se algoritmos mistos simples / pontos interiores. (Lins e Calôba, 2006)

O desenvolvimento de computadores pessoais potentes no início da década de 1980 foi essencial para uma disseminação ainda maior da Programação Linear e da Pesquisa Operacional, destacando-se a incorporação do Solver ao Microsoft Excel. (Lins e Calôba, 2006)

Uma boa forma de se avaliar o potencial da Pesquisa Operacional e da Programação Linear é através de aplicações que resultaram em substanciais economias de divisas. A associação norte-americana de PO: o *Institute for Operations Research and Management*

Science (*INFORMS*) promove anualmente um concurso para selecionar as melhores aplicações (*Franz Edelmn prize*), as quais são publicadas no periódico *Interfaces*. A seguir a tabela 2 com uma relação de trabalhos premiados:

Tabela 2. Aplicações de Pesquisa Operacional

ORGANIZAÇÃO	NATUREZA DA APLICAÇÃO	ANO DA PUBLICAÇÃO	ECONOMIA ANUAL (US$)
Canadian Pacific Railway	Programação de despacho de trens, com aumento de 40% na produtividade e redução de 17% no consumo de combustível.	2004	380 milhões entre 1999 e 2002
Rede aérea da UPS	UPS e o MIT desenvolveram sistema para determinar rotas e alocar vôos, de modo a otimizar a entrega de encomendas expressas.	2004	87 milhões
Menlo Worldwide Forwarding	Desenvolvimento de modelo de otimização de redes de rotas aéreas para entregas de cargas na América do Norte.	2004	80 milhões em 2002
Texas Children’s Hospital	Modelo de otimização para apoiar as atividades diárias dos negociadores de contratos com seguradoras, utilizando previsão de demanda e análise de risco.	2004	17 milhões anuais
Schindler Elevator Corporation	Sistema de otimização para planejamento e programação de rotas para manutenção preventiva, integrado a um sistema de informação geográfica.	2003	1 milhão anual
Peugeot-Citroen	Modelo de simulação e filas para otimizar linhas de montagem de carrocerias.	2003	130 milhões de aumento de receita em 2001
Jan de Wit Company	Sistema de suporte à decisão baseado em Programação Linear para otimizar a quantidade e qualidade de flores, determinando o número de leitos e o	2002	Aumento de 11% p/ 61% das flores de qualidade superior

	ciclo de produção em cada estufa.		
NBC television network	Sistema de vendas baseado em otimização, para melhorar as receitas e a produtividade. Elimina gargalos e estima a demanda, para a programação de comerciais.	2002	200 milhões de aumento na receita entre 1996 e 2000
Fingerhut/BM	Otimização de seqüências de catálogos para 7 milhões de clientes, utilizando Programação Linear, para alocar correspondências, evitando redundância ou improdutividade.	2001	3,5 milhões anuais de aumento nos lucros
Visteon (Ford) Automotive Systems	Aumento na produção de eixos para caminhões e utilitários Ford, utilizando um Sistema de Suporte à Decisão para simulação e otimização de processos.	2000	144.496 eixos adicionais em 1998
Condado de Jonhston, na Carolina do Norte	Modelo de programação matemática para apoiar políticas públicas sobre matrículas, transporte e localização de escolas integrado em ambiente de sistema de informação geográfica.	1999	770 mil anuais de economia em custos de transporte
Taco Bell	Agendar os funcionários em turnos de forma a maximizar o nível de serviço reduzindo custos	1998	53 milhões de economia em 1997
South African defense force	Reprojetar o tamanho e forma da força defensiva e seus sistemas de armamentos	1997	1,1 bilhão
China	Selecionar e programar projetos para atender a demanda de energia.	1995	425 milhões
Delta Airlines	Maximizar lucro fazendo associação de tipos de aviões com 2.500 rotas domésticas.	1994	100 milhões
New Haven Health Department	Projetar um programa de troca de seringas eficiente para evitar a propagação de HIV e AIDS.	1993	33% menos HIV/AIDS
AT & T	Desenvolver um sistema PC para	1993	750 milhões

	guiar os consumidores no projeto de call centers.		
Yellow Freight System, Inc.	Otimizar o projeto de uma rede de transporte rodoviário nacional e o roteamento das entregas.	1992	17,3 milhões
IBM	Integrar uma rede nacional de peças sobressalentes para melhor o suporte nacional ao cliente.	1990	25 milhões e 250 milhões em estoque
Texaco, Inc.	Otimizar a mistura de ingredientes de blending em gasolina de forma a satisfazer vendas e qualidade.	1989	30 milhões

Fonte: *Interfaces / INFORMS*

Segundo Fitzsimmons e Fitzsimmons (2000), a Programação Linear (PL) é uma ferramenta computacional de modelagem para tomadas de decisão associadas à alocação de recursos que transcendem todos os aspectos de gerenciamento de gerações de serviços. Ela se refere ao planejamento que utiliza modelos matemáticos que consistem em expressões lineares. Este é o modelo básico para a compreensão de todos os outros. Um modelo é um veículo para uma visão bem estruturada da realidade, ou seja, é uma abstração seletiva da realidade. A modelagem seleciona as características da realidade mais importantes para o problema de interesse. Sendo assim, a Programação Matemática é fortemente direcionada ao apoio da tomada de decisão no gerenciamento de sistemas de grande porte, principalmente no tratamento de variáveis quantificadas. No que diz respeito à tomada de decisão como o nome mesmo já diz é o ato de selecionar, dentre várias decisões possíveis, a mais adequada para o alcance de certo objetivo. (Macedo & Bengio)

3.2.1. Problemas de Programação Linear

3.2.1.1 Conceitos-chave da Programação Linear

Em linhas gerais, a programação linear trata do problema de alocação ótima de recursos escassos para a realização de atividades. Por ótimo entendemos que não haja uma outra solução que seja melhor do que a oferecida (pode haver outras tão boas quanto). Os recursos escassos representam nossa realidade de existência finita de recursos, por mais abundantes que sejam. As atividades se relacionam com algum interesse que tenhamos na fabricação de produtos, na mistura de substâncias, no atendimento ao público, no transporte e armazenagem de mercadorias etc. (Colin, 2007)

Antes da definição de PL, algumas outras definições mais simples e correlacionadas ajudarão no entendimento dos conceitos mais avançados. (Colin, 2007)

Modelo

Modelo é uma representação simplificada do comportamento da realidade expressa na forma de equações matemáticas que serve para simular a realidade.
Exemplo: Modelo que representa a distribuição física de refrigerantes aos clientes de uma empresa engarrafadora de bebidas.

A qualidade de um modelo está muito relacionada com a significância das respostas oferecidas por ele e pouco relacionada com sua adesão à realidade. É muito comum que pessoas menos instruídas no assunto acreditem que um bom modelo é aquele que espelha com fidelidade a realidade. Nós, por outro lado, acreditamos que um bom modelo é aquele que consegue capturar as principais características do sistema a ser otimizado e que, com a maior simplicidade possível, gera uma solução que facilita em muito a tomada de decisões. (Colin, 2007)

A experiência indica que um modelo simples (mais facilmente implementável) com 95% de precisão é preferível a um outro mais sofisticado com precisão maior. Em geral essa "precisão" está associada ao nível de tomada de decisões ao qual o modelo está associado. Os modelos mais simples em geral usam informações agregadas, ao passo que os mais precisos usam informações mais operacionais e detalhadas. (Colin, 2007)

Variáveis de decisão

São as variáveis utilizadas no modelo que podem ser controladas pelo tomador de decisão. A solução do problema é encontrada testando-se diversos valores das variáveis de decisão.
Exemplo: O número de caminhões que a engarrafadora deve despachar num determinado dia.

Parâmetros

São variáveis utilizadas no modelo que não podem ser controladas pelo tomador de decisão. A solução do problema é encontrada admitindo como fixos os valores dos parâmetros.

Exemplo: A capacidade de cada caminhão que vai transportar o refrigerante. Os caminhões têm uma capacidade especificada pelo fabricante e uma carga total transportada que é limitada pela legislação rodoviária.

Função-objetivo

É uma função matemática que representa o principal objetivo do tomador de decisão. Ela é de dois tipos: ou de minimização (de custos, erros, chance de perda, desvio de objetivo etc.) ou de maximização (de lucros, receita, utilidade, bem-estar, riqueza, chance de sobrevivência etc.).

Exemplo: Minimizar os custos de transporte relativos à distribuição do refrigerante.

Restrições

São regras que dizem o que podemos (ou não) fazer e/ou quais são as limitações dos recursos ou das atividades que estão associados ao modelo.

Exemplo: O número total de caminhões despachados pela manhã é menor ou igual ao número de motoristas que a empresa tem à disposição no primeiro turno.

Função Linear

Uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma função linear se for do tipo $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, sendo $c_1, c_2, ..., c_n$ valores constantes.

Exemplo: $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$ é uma função linear, ao passo que as funções $f(x_1, x_2) = 5x_1x_2$ e $f(a, b) = ab^3 + 2$ são não lineares.

Inequação linear

Para um número qualquer b e uma função linear $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, define-se uma inequação linear como as inequações do tipo $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b$ ou $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b$.

Exemplo: $2x_1 + 5x_2 \leq 8$ e $12a + 3b \geq 3$ são inequações lineares, mas $5x_1x_2 + x_3 \geq 4$ e $ab^3 \leq 6$ são inequações não-lineares.

Algoritmo

É uma seqüência de instruções que para uma determinada entrada gera um determinado resultado.

Exemplo: Uma receita de culinária é um exemplo clássico de algoritmo: a descrição detalhada dos ingredientes e do modo de preparo permite que pratos sejam preparados sempre da mesma forma, gerando sempre os mesmos resultados.

Apesar de a definição permitir que sinais $<$ e $>$ sejam usados além de $\leq$ e $\geq$, eles não foram contemplados porque só em casos especiais são utilizados na programação matemática. (Colin, 2007)

A programação linear é uma ferramenta utilizada para resolver problemas de otimização. Para tanto, ela utiliza um modelo geral que contempla, de forma geral: (Colin, 2007)

- As variáveis as quais temos poder para alterar, ou seja, variáveis de decisão;
- Os parâmetros, que são variáveis e os quais não temos poder para alterar;
- A função-objetivo, que define e mensura o principal objetivo;
- As restrições que combinam variáveis e parâmetros para estabelecer regras, relações e limites do modelo;
- Uma “montagem” ou modelo que contempla parâmetros, variáveis, função-objetivo e restrições e que representa o problema real em análise utilizando somente funções lineares.

O modelo que representa matematicamente o problema em análise é resolvido por intermédio de um dos algoritmos que resolvem problemas de programação linear. O mais comum deles é o denominado algoritmo (ou método simplex), criado por Dantzig antes dos anos 50. (Colin, 2007)

Na programação linear, assim como em toda programação matemática, utiliza-se o termo solução para representar atribuições de valores às variáveis de decisão. Essa característica (por sinal, diferente do conhecimento comum) faz com que existam soluções viáveis, inviáveis e ótimas. (Colin, 2007)

Uma solução viável é aquela cujos valores das variáveis de decisão atendem a todas as restrições. Analogamente, na solução inviável, os valores das variáveis de decisão fazem com que pelo menos umas das restrições não seja atendida. Uma solução ótima é aquela que além de ser viável gera um valor de função-objetivo extremo: maior valor dentre todos os existentes no caso da maximização e menor valor no caso da minimização. (Colin, 2007)

3.2.1.2 Suposições da Programação Linear

Quatro características são necessárias aos problemas de programação linear: proporcionalidade, aditividade, divisibilidade e certeza (veja figura 1).

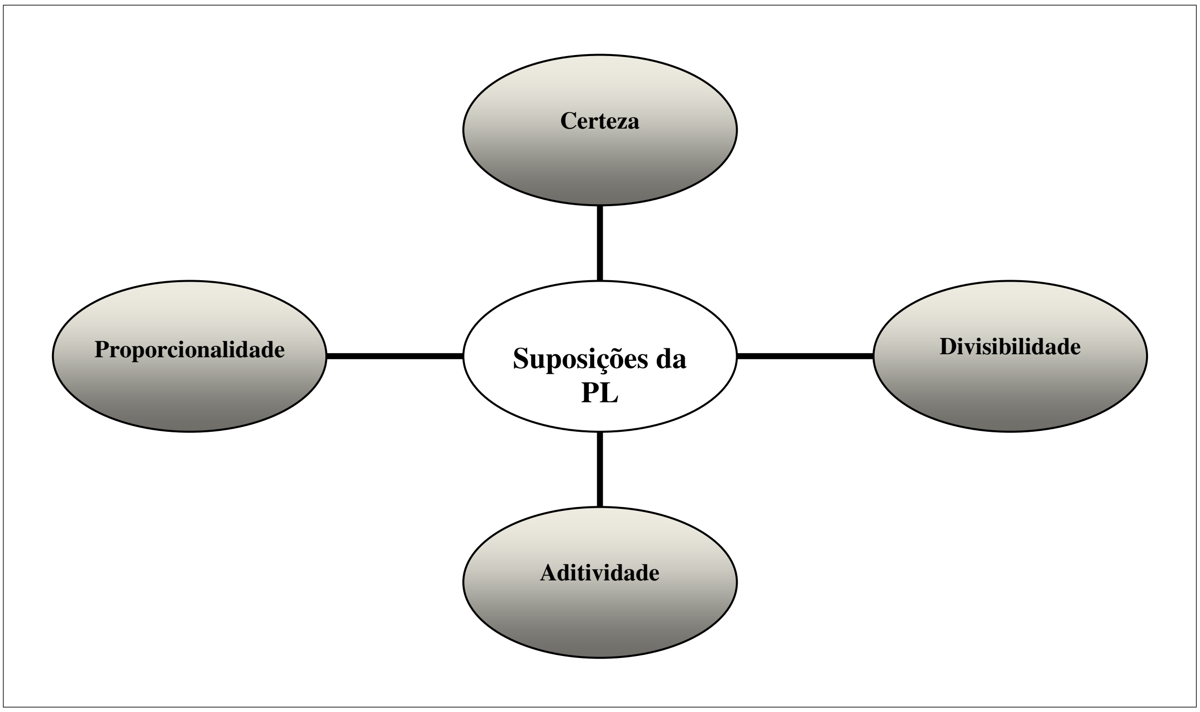

Figura 1 Suposições de programação linear.

A **divisibilidade** indica que as variáveis podem ter valores fracionados, ou seja, as variáveis podem ser divididas em qualquer nível fracional. A implicação dessa suposição é que não pode haver a exigência de as variáveis serem inteiras (eventualmente, ainda que incomumente, pode acontecer de as variáveis serem inteiras na solução de um problema). As variáveis inteiras são importantes em diversas ocasiões, mas dentre essas uma de especial importância é aquela na qual elas assumem valores pequenos. Pense na variável que define número de aviões a serem comprados por uma empresa aérea ou o número de lojas que uma determinada rede de varejo está planejando abrir em Belém do Pará: em qualquer um dos casos, a suposição de divisibilidade invalida a utilização da PL. (Colin, 2007)

A suposição da **aditividade** indica que os relacionamentos entre as variáveis são sempre adições e subtrações, mas nunca outras operações. A implicação dessa suposição é que não pode haver relacionamentos de dependência (funcionais) entre as variáveis. Por exemplo, é comum que preço e quantidade vendida sejam inter-relacionados, e um modelo que queira maximizar a margem da empresa não pode usar um modelo linear, tendo em vista que existem relacionamentos não-aditivos (no caso, multiplicativos) entre as variáveis. (Colin, 2007)

A necessidade da **proporcionalidade** indica que as contribuições de cada variável de decisão são proporcionais ao valor da variável de decisão. As contribuições da variável de decisão acontecem tanto na função-objetivo como nos lados esquerdos das restrições. Por exemplo, para uma função-objetivo que representa o custo de produção, em que cada variável é a representação da quantidade de cada produto a ser produzido, o valor da função-objetivo deve ser proporcional ao número de produtos. Nesse caso, não poderia haver ganho de escala, ou seja, fazer 10 ou 10.000 produtos gera custos 10 ou 10.000 vezes maior do que fazer um único produto. Existem modelagens específicas para casos em que os ganhos de escala e fenômenos correlatos são importantes. (Colin, 2007)

A suposição de **certeza** indica que todos os parâmetros utilizados nos modelos são conhecidos com certeza. Como muitas vezes acontece de essa suposição não ser verdadeira (por muitos motivos, mas dentre outros por se trabalhar com eventos futuros), utilizamos a análise de sensibilidade para alterar os parâmetros, capturando um pouco da incerteza associada a eles. A análise de sensibilidade tenta identificar como a solução ótima muda quando acontecem alterações nos parâmetros. Para casos em que os parâmetros tenham que ser modelados efetivamente como variáveis aleatórias, deve-se utilizar uma outra metodologia de programação matemática denominada programação estocástica. (Colin, 2007)

Segundo Luenberger (1989), um problema de otimização é um problema da seguinte forma:

<u>Problema de Minimização</u>:

"Encontre, se existir, $X_0 \varepsilon \Re^n$ tal que: $f(X_0) \leq f(X)$ para todo X ε C."

<u>Problema de Maximização</u>:

"Encontre, se existir, $X_0 \varepsilon \Re^n$ tal que: $f(X_0) \geq f(X)$ para todo X ε C."

Onde:

- f é chamado de função objetivo.
- C é chamado de conjunto das soluções viáveis

De uma forma mais condensada um problema de otimização pode ser escrito como:

- Minimize f(x), x ε C.
- Maximize f(x), x ε C.

Conforme Fitzsimmons e Fitzsimmons (2000), modelos de programação linear são uma classe especial de modelos de otimização com restrições e para que um determinado sistema possa ser representado por meio de um modelo PL todas as relações entre variáveis são expressas com funções lineares e todos os modelos de PL possuem a seguinte forma algébrica:

$$\textit{Maximize (ou Minimize)}: \; c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\textit{Sujeito a (S.a.)}: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_n$$

e às restrições de não-negatividade

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \; .$$

Esta estrutura de problema contém as seguintes características:

- Variáveis de Decisão: as variáveis x1, x2,..., xn são denominadas variáveis de decisão, as quais assumem valores reais maiores ou iguais a zero;
- Função Objetivo: a função c1x1+c2x2+...+cnxn é denominada função objetivo, a qual pode ser maximizada (por exemplo, lucros) ou minimizada (por exemplo, custos), isso vai depender da natureza dos coeficientes c1, c2,..., cn, onde esta função deve ser maior ou menor possível, atendendo às seguintes restrições do sistema;
- Restrições: quando valores numéricos são designados para as variáveis de decisão x1, x2,...,xn para influenciar a função objetivo, estes valores também influenciam as restrições. Os modelos requerem que os valores numéricos sejam tais que não violem nenhuma restrição. O conjunto dos números b1, b2,..., bn é denominado lado direito da inequação, (RHS - Right-Hand Sides) que limitam indiretamente os possíveis valores das variáveis de decisão;
- Parâmetros: os coeficientes na função objetivo e os valores RHS são parâmetros. Os parâmetros são entidades cujo valor permanece fixo durante a resolução do problema, entretanto pode ser mudado depois;

- Constantes: os coeficientes a11, a12,..., a1n representam o consumo do primeiro recurso RHS por unidade de cada variável de decisão, que refletem uma taxa constante de utilização do recurso.

3.2.2. Teoria da Dualidade na Programação Linear

Uma das hipóteses dos problemas de programação linear é a consideração de certeza nos coeficientes e constantes. Isto é, a solução otimizada é dependente dos coeficientes da função-objetivo (geralmente lucro, receita ou custo unitário) e dos coeficientes e constantes das restrições (geralmente necessidades por produto e disponibilidade de um recurso). (Lachtermacher, 2007)

O problema Dual é um modelo associado ao original, que traz a interpretabilidade econômica para os valores de recursos e para os coeficientes da função-objetivo. Esta interpretabilidade serve para amenizar essas dúvidas impostas pela hipótese de certeza do problema de programação linear. (Lachtermacher, 2007)

Todo problema de programação linear possui um outro problema de programação linear associado a ele, denominado problema dual. O problema original é denominado primal. Surpreendentemente um pode ser transformado no outro, e cada um deles possui características distintas, embora ambos possuam a mesma solução ótima. Se, por exemplo, o problema primal é de minimização, o dual é de maximização. Se o primal possui *n* variáveis e *m* restrições, o dual possui *m* variáveis e *n* restrições, e assim por diante. (Colin, 2007)

Em essência, a dualidade leva a dois resultados importantes. O primeiro resultado é relacionado a facilidade de solução do problema. Como o dual pode se transformar no primal e vice-versa, pode-se escolher para resolver o que for mais fácil dos dois. Existem diversos métodos de solução de problemas de PL e softwares que se beneficiam dessas propriedades. Um segundo resultado é que a dualidade permite um entendimento mais profundo do problema em questão. (Colin, 2007)

Definição das Relações Primal-Dual:

Problema Primal

$$
\begin{aligned}
&minimizar\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.a{:}\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
&\qquad\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
&x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}
$$

Problema Dual

$$
\begin{aligned}
&maximizar\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
&s.a{:}\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\
&\qquad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_2 \\
&\vdots \\
&\qquad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n \\
&\qquad y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)
\end{aligned}
$$

Observe que:

(1) o problema de minimização se transformou em maximização;

(2) os lados direitos das restrições do problema primal se transformaram nos coeficientes da função-objetivo do problema dual;

(3) os coeficientes da função-objetivo do problema primal se transformaram nos lados direitos das restrições do problema dual;

(4) os coeficientes das restrições tecnológicas trocaram de linhas para colunas (como na operação de transposição de uma matriz). (Colin, 2007)

Existem algumas razões para o estudo dos problemas duais. A primeira e mais importante são as interpretações econômicas que podemos obter dos valores das variáveis do Dual na solução ótima, tais como variações marginais. A segunda está ligada ao número de restrições. Computacionalmente falando é, algumas vezes, mais eficiente resolver o problema dual (dependendo do nº de restrições e de variáveis) do que o primal correspondente, já que, obtendo a solução ótima de um, estaremos obtendo a do outro. (Lachtermacher, 2007)

TEOREMA I

O Dual do Dual é o primal. (Lachtermacher, 2007)

TEOREMA II

Se a k-ésima restrição do Primal (x_p) é uma igualdade, então a k-ésima variável do Dual (y_k) é sem restrição de sinal, isto é, pode ter valor positivo, zero ou negativo. (Lachtermacher, 2007)

TEOREMA III

Se a p-ésima variável do Primal é sem restrição de sinal, então a p-ésima restrição do Dual é uma igualdade. (Lachtermacher, 2007)

TEOREMA IV – Propriedade Fraca da Dualidade (Hillier & Liberman, 1995)

Se o problema Primal (maximização) e o Dual tiverem soluções compatíveis finitas, então $Z \geq D$ *para qualquer solução compatível do Primal e qualquer solução compatível do Dual*. Onde Z é a função objetivo Primal e D é a função objetivo Dual. (Lachtermacher, 2007) Matematicamente falando, isto pode ser representado pela equação a seguir.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i = D$$

$$Z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \leq b_1y_1 + \cdots + b_my_m = D$$

TEOREMA V – Propriedade Forte da Dualidade (Hillier & Liberman, 1995)

Se tanto o Primal quanto o Dual tiverem soluções compatíveis finitas, então existe uma solução ótima finita para cada um dos problemas, tal que $Z^* = D^*$. (Lachtermacher, 2007)

Matematicamente falando, isto pode ser representado pela equação abaixo.

$$Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i^* = D^*$$
$$Z^* = c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + \cdots + b_my_m^* = D^*$$

Onde:

x_j^* = valor da variável *j* do primal na solução ótima

y_i^* = valor da variável *i* do dual na solução ótima

n = número de variáveis originais do Primal

m = número de restrições do Primal

Z^* = Valor ótimo do Primal

D^* = Valor ótimo do Dual

Os Teoremas IV e V nos levam aos Teoremas VI e VII apresentados a seguir, referentes à relação entre o Primal e o Dual. (Lachtermacher, 2007)

TEOREMA VI – Teorema da Dualidade (Hillier & Liberman, 1995)

As possíveis relações entre os problemas Primal e Dual são as seguintes: (Lachtermacher, 2007)

1. *Se um dos problemas tiver solução viável e sua função-objetivo for limitada (portanto, tiver uma solução ótima), então o outro também terá, isto é, as propriedades fraca e forte da dualidade serão aplicáveis.*
2. *Se um dos problemas tiver soluções viáveis, porém uma função-objetivo ilimitada (portanto, sem solução ótima), então o outro não terá soluções viáveis.*
3. *Se um dos problemas não tiver solução viável, então outro não terá soluções viáveis ou terá soluções ilimitadas.*

A tabela 3 a seguir representa, de forma, resumida as possíveis relações entre o Primal e o Dual (Chvátal, 1983).

Tabela 3 Resumo das Possíveis Relações entre Primal e Dual

	Dual	Tem soluções viáveis		Sem soluções viáveis
Primal		Ótima	Ilimitado	Inviável
Tem soluções viáveis	Ótima	Possível	Impossível	Impossível
	Ilimitado	Impossível	Impossível	Possível
Sem soluções viáveis	Inviável	Impossível	Possível	Posível

O último teorema relevante diz respeito à relação entre as variáveis dos problemas Primal e Dual. É conhecido como Teorema da Folga Complementar. Dados os problemas primal e dual a seguir:

PRIMAL

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \leq b_1 \; ou \; a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \leq b_2 \; ou \; a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \leq b_m \text{ ou } a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

DUAL

$$Min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i \geq c_1 \text{ ou } a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i2} y_i \geq c_2 \text{ ou } a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geq c_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{im} y_i \geq c_n \text{ ou } a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

O teorema da folga complementar pode então ser enunciado como:

TEOREMA VII – Teorema da Folga Complementar (Chvátal, 1983)

As condições necessárias e suficientes para que soluções viáveis dos problemas Primal e Dual sejam simultaneamente ótimas são dadas por:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ ou } x_j^* = 0 \text{ ou ambos } (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ e}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ ou } y_i^* = 0 \text{ ou ambos } (i = 1, 2, \ldots, m)$$

3.3.AED (Análise Envoltória de Dados)

AED é um modelo de programação fracional que avalia a eficiência relativa de unidades homogêneas na presença de múltiplos *inputs* e *outputs*. O AED foi utilizado inicialmente para comparar a eficiência de unidades homogêneas de trabalho, ou *decision making units* (DMUs), como em hospitais, escolas, aeroportos, companhias de manufatura, rede de lojas, e agências bancárias (Oliveira, 2000)

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) foram os criadores do AED, estes perceberam as dificuldades em determinar os pesos que deveriam ser dados a cada um dos múltiplos *inputs* e *outputs* das DMUs. Os autores acima reconheceram que para cada DMU os múltiplos *inputs* e *outputs* tinham valores diferentes e consequentemente adotar pesos diferentes para cada um. Determinaram desta forma que cada DMU adotaria seus pesos de forma que sua eficiência produtiva fosse a mais favorável possível. (Oliveira, 2000)

3.3.1. Modelos clássicos multidimensionais da AED

3.3.1.1. Modelo CCR (Constant Returns to Scale)

O modelo CCR, apresentado originalmente por Charnes et al. (1978), constrói uma superfície linear por partes, não paramétrica, envolvendo os dados. Trabalha com retornos constantes de escala, isto é, qualquer variação nas entradas (*inputs*) produz variação proporcional nas saídas (*outputs*). Esse modelo é igualmente conhecido como modelo CRS - *Constant Returns to Scale***.** (Mello et al, 2005)

3.3.1.1.1. <u>Modelo CCR orientado a *inputs* – Generalização do Modelo CCR dos Multiplicadores</u>

Este modelo determina a eficiência pela otimização da divisão entre a soma ponderada das saídas (*output* virtual) e a soma ponderada das entradas (*input* virtual) generalizando, assim, a definição de Farrel (1957). O modelo permite que cada DMU escolha os pesos para cada variável (entrada ou saída) da forma que lhe for mais benevolente, desde que esses pesos aplicados às outras DMU's não gerem uma razão superior a 1. (Mello et al, 2005)

Essas condições são formalizadas na equação (1), onde Eff_o é a eficiência da DMU o em análise; v_i e u_j são os pesos de *inputs* i, $i = 1,...,r$, e *outputs* j, $j = 1,...,s$ respectivamente; x_{ik} e y_{jk} são os *inputs* i e *outputs* j da DMU k, $k = 1,...,n$; x_{io} e y_{jo} são os *inputs* i e *outputs* j da DMU o. (Mello et al, 2005)

$$\begin{aligned} & Max\ Eff_o = \left(\frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io}} \right) \\ & sujeito\ a \\ & \frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik}} \leq 1, \forall k \\ & v_i, u_j \geq 0, \forall i, j \end{aligned} \qquad (1)$$

O problema apresentado é de programação fracionária, que deve ser resolvido para cada umas das DMU's e pode ser transformado em um problema de programação linear (PPL). Para tal, obriga-se que o denominador da função objetivo deva ser igual a uma constante, normalmente igual à unidade. A formulação do modelo CCR é, então, apresentada em (2). Nesse modelo as variáveis de decisão são os pesos v_i e u_j. (Mello et al, 2005)

$$Max\ Effo = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo}$$

Sujeito a (2)

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k.$$

$$v_i, u_j \geq 0 \geq, \forall i, j$$

A estrutura matemática desses modelos permite que uma DMU seja considerada eficiente com vários conjuntos de pesos. Em particular, podem ser atribuídos pesos zeros a algum *input* ou *output,* o que significa que essa variável foi desconsiderada na avaliação.

3.3.1.1.2. Modelo CCR orientado a *outputs*

Podemos desenvolver um modelo orientado a *outputs*, ou seja, que maximiza as saídas mantendo inalteradas as entradas. Neste modelo, apresentado em (3), as variáveis de decisão são as mesmas do modelo orientado a *inputs*. Entretanto, h_0 representa por quanto todos os produtos devem ser multiplicados, mantendo-se constantes os recursos, para a DMU *o* atingir a fronteira eficiente. Vemos que h_0 é, então, um número maior que 1 (provoca incremento no valor dos *outputs*), pelo que a eficiência é 1/ h_0. No caso do modelo CCR, as duas orientações fornecem o mesmo valor de eficiência, no entanto, com λ's diferentes. (Mello et al, 2005)

$$Max\ h_0$$

sujeito a

$$x_{j0} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i \qquad (3)$$

$$-h_0 y_{j0} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Em (3), h_0 é a eficiência ($h_0 = 1/Eff_0$) e λ_k é a contribuição da DMU *k* na formação do alvo DMU *o*. (Mello et al, 2005)

As equações apresentadas em (4) mostram o modelo DEA CCR orientado a *outputs*, na forma fracionária. Em (5) é apresentado o modelo linearizado. Em ambos $h_0 = 1/Eff_0$. (Mello et al, 2005)

3.3.1.2. Modelo BCC

O modelo BCC, devido a Banker et al. (1984), considera retornos variáveis de escala, isto é, substitui o axioma da proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* pelo axioma da convexidade. Por isso, esse modelo também é conhecido como VRS – *Variable Returns to Scale*. Ao obrigar que a fronteira seja convexa, o modelo BCC permite que DMUs que operam com baixos valores de inputs tenham retornos crescentes de escala e as que operam com altos valores tenham retornos descrescentes de escala. Matematicamente, a convexidade da fronteira equivale a uma restrição adicional ao Modelo do Envelope, que passa a ser o indicado em (4) para orientação a *inputs*, e (5) para orientação a *outputs*. (Mello et al, 2005)

$$\begin{aligned}
&Min\ h_0 \\
&sujeito\ a \\
&h_0 x_{i0} - \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i \\
&-y_{j0} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j \qquad (4) \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \\
&\lambda_k \geq 0, \forall k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Max\ h_0 \\
&sujeito\ a \\
&x_{i0} - \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i \\
&-h_0 y_{j0} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j \qquad (5) \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \\
&\lambda_k \geq 0, \forall k
\end{aligned}$$

Os duais dos PPLs (4) e (5) geram os modelos BCC dos Multiplicadores orientados a *inputs* e a *outputs,* apresentados em (6) e (7), respectivamente. Nestes modelos u_* e v_* são as variáveis duais associadas à condição $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ e são interpretadas como fatores de escala.

$$\begin{aligned}
&Max\ Eff_o = \textstyle\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo} + u_* \\
&sujeito\ a \\
&\textstyle\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} = 1 \qquad (6) \\
&-\textstyle\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} + u_* \leq 0, \forall k \\
&v_i, u_j \geq 0, u_* \in \Re
\end{aligned}$$

$$Min\ Eff_o = \sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} + v_*$$
$$sujeito\ a$$
$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo} = 1 \qquad (7)$$
$$-\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - v_* \leq 0, \forall k$$
$$v_i, u_j \geq 0, u_* \in \Re$$

3.4. Programação Linear e AED (Análise Envoltória de Dados)

O objetivo primário de AED consiste em comparar um certo número de DMU's que realizam tarefas similares e se diferenciam nas quantidades dos recursos consumidos e das saídas produzidas. (Mello et al, 2005)

Segundo (Mello et al, 2005) destacamos ainda os seguintes objetivos:

- Identificar as DMU's eficientes, medir e localizar a ineficiência e estimar uma função de produção linear por partes (*piece-wise linear frontier*), que fornece o *benchmark* (referência) para as DMU's ineficientes. Ao identificar a origem e a ineficiência relativa de cada uma das DMU's, é possível analisar qualquer de suas dimensões relativas a entradas e/ou saídas. A fronteira de eficiência compreende o conjunto de DMU's Pareto eficientes;
- Determinar a eficiência relativa das DMU's, contemplando cada uma relativamente a todas as outras que compõem o grupo a ser estudado. Assim, sob determinadas condições, AED pode ser usado na problemática da ordenação como ferramenta Multicritério de apoio à decisão (BARBA-ROMERO, POMEROL, 1997), já que, neste caso, estabelece uma relação binária de pré-ordem entre as DMU's;
- Subsidiar estratégias de produção que maximizem a eficiência das DMU's avaliadas, corrigindo as ineficientes através da determinação de alvos;
- Estabelecer taxas de substituição entre as entradas, entre as saídas e entre entradas e saídas, permitindo a tomada de decisões gerenciais. O estabelecimento dessas taxas de substituição nem sempre tem solução única (ROSEN et al., 1998; SOARES DE MELLO et al., 2001), já que como vimos anteriormente, os pesos das unidades extremo-eficientes não são únicos;
- Considerar a possibilidade de os *outliers* não representarem apenas desvios em relação ao comportamento "médio", mas possíveis *benchmarks* a serem analisados pelas demais DMU's. Os outliers podem representar as melhores práticas dentro do universo investigado;
- Não necessidade de determinar uma forma funcional para a estimativa da fronteira, como é feito nos modelos de Fronteira Estocástica (SFA) (AIGNER et al., 1977;

MEEUSEN, VAN DEN BROECK, 1977). Coeli (1995) apresenta uma rápida comparação entre SFA e DEA.

Segundo Ângulo Meza (1998), em modelagem por AED devemos cumprir três etapas para implementar o problema:

3.4.1. Definição e seleção de DMU's

O conjunto de DMU's adotado deve ter a mesma utilização de entradas e saídas, variando apenas em intensidade. Deve ser homogêneo, isto é, realizar as mesmas tarefas, com os mesmos objetivos, trabalhar nas mesmas condições de mercado e ter autonomia na tomada de decisões. (Mello et al, 2005)

3.4.2. Seleção das variáveis

A escolha das variáveis de entrada e saída deve ser feita a partir de uma ampla lista de possíveis variáveis ligadas ao modelo. Esta listagem permite-nos ter maior conhecimento sobre as unidades a serem avaliadas, explicando melhor suas diferenças. (Mello et al, 2005)

É possível que um grande número de DMU's localizem-se na fronteira. Isto reduz a capacidade de AED em discriminar unidades eficientes de ineficientes. Devemos, assim, procurar um ponto de equilíbrio na quantidade de variáveis e DMU's escolhidas, visando aumentar o poder discriminatório de AED. Na literatura encontramos diferentes abordagens para o problema de seleção de variáveis: por método estatístico (LINS, MOREIRA, 1999) e com técnicas Multicritério (SOARES DE MELLO et al., 2002; SENRA, 2004). (Mello et al, 2005)

3.4.3. Escolha e aplicação do modelo

Como vimos, os modelos AED mais conhecidos são o CCR e o modelo BCC. Ao escolher um modelo particular, determinamos (CHARNES et al., 1994):

- As propriedades implícitas dos retornos de escala;
- A geometria da superfície de envelopamento dos dados, que tenha relação com as medidas de eficiência;
- As projeções de eficiência, ou seja, o caminho das DMU's ineficientes até a fronteira de eficiência.

O *benchmark* das unidades ineficientes é determinado pela projeção destas na fronteira de eficiência. A forma como é feita esta projeção determina a orientação do modelo:

orientação a *inputs*, quando a eficiência é atingida por uma redução equiproporcional de entradas, mantidas as saídas constantes; e orientação a *outputs*, quando se deseja maximizar os resultados sem diminuir os recursos. (Mello et al, 2005)

3.4.4. Propriedades dos modelos

De acordo com (Mello et al, 2005) os modelos AED têm algumas propriedades comuns. Outras são individuais, próprias de cada modelo. Algumas dessas características são:

- Em qualquer modelo AED, cada DMU escolhe seu próprio conjunto de pesos, de modo que apareça o melhor possível em relação às demais. Dessa forma, cada DMU pode ter um conjunto de pesos (multiplicadores) diferente;
- Todos os modelos são invariantes com a escala de medida, isto é, usar como variável, por exemplo, a área plantada de uma determinada cultura em Km^2, m^2 ou hectares não afeta o resultado;
- Em qualquer modelo AED, a DMU que apresentar a melhor relação (*output j*)/(*input i*) será sempre eficiente;
- Pré escolha das variáveis, ou seja, identificar quais variáveis poderão compor o modelo. A decisão se elas entrarão efetivamente no modelo depende de uma segunda análise, mais aprofundada;
- O modelo CCR tem como propriedade principal a proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* na fronteira, ou seja, o aumento (decremento) na quantidade dos *inputs*, provocará acréscimo (redução) proporcional no valor dos *ouputs*;
- No modelo BCC, a DMU que tiver o menor valor de um determinado *input* ou o menor valor de um certo *output* será eficiente. A esta DMU chamamos de eficiente por *default* ou eficiente à partida;
- O modelo BCC é invariante a translações a *outputs* quando é orientado a *inputs* e vice-versa. Essa propriedade pode ser importante quando trabalhamos com casos em que há variáveis negativas, por exemplo.

3.5. Implementação Computacional

Os exemplos de aplicação seguintes são referentes ao modelo CCR orientados a *inputs*. Estes exemplos foram aplicados anteriormente em outros trabalhos publicados usando alguma ferramenta computacional como o Excel, o SIAD e até o próprio LINDO. No entanto, para o nosso presente estudo usamos a implementação de uma interface utilizando os softwares MATLAB e LINDO da seguinte forma: Os dados referentes ao modelo de AED são armazenados em um arquivo para serem manipulados pelo MATLAB, em seguida o modelo de programação linear associado ao problema de AED é construído podendo ser resolvido pelo próprio MATLAB ou pelo LINDO.

Portanto, o script para o programa a ser utilizado nestes exemplos segue:

```
function saida1 = dea1(input,output,num_input,num_output,num_dmu)
%csense = zeros(1,num_dmu+1);
% Cria os sinais das desigualdades
for i = 1:num_dmu+1,
    if i == 1
        csense(i) = 'E';  %Restrição de Igualdade
    else
       csense(i) = 'L';   %Restrição do Tipo ≤
    end
end
peso = csense;
% Define os tipos de variáveis
     for i = 1:num_input+num_output,
         vtype(i) = 'C';      % Todas as variáveis são continuas
     end
%%%%%% Define  os limites de variáveis  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 lb = zeros(num_input+num_output,1);  % Todas as variáveis são não negativas
 ub = ones(num_input+num_output,1);    % Todas as variáveis são menores ou iguais a 1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Construção das instâncias do PPL
 saida1 = [];
 for i = 1:num_dmu,
 vini = [zeros(1,num_output) input(i,:)];
 A = [vini;output -input];  % Construção da Matriz A
 b = zeros(num_dmu+1,1);     % Construção do vetor b
 b(1) = 1;
 c = -[output(i,:) zeros(1,num_input)];  % Construção da função objetivo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% A interface com o LINDO
 [pesos,sol_dual1,folgas, sol_dual2,obj,solstat] = LMsolvem(A,b,c,csense,lb,ub,vtype);

% Fim da Interface
 efi = -obj*100;
 saida1 = [saida1;pesos' efi];
 end
%Exibe o resultado Final
 saida1 = [linspace(1,num_dmu,num_dmu)' saida1];
end
```

3.6 Resultados Obtidos

O programa acima foi utilizado nos exemplos do presente trabalho, uma vez que os mesmos são todos referentes ao modelo CCR orientados a *inputs*. Este programa nos fornece uma tabela com a quantidade de DMU’s, os valores referentes aos pesos de cada DMU em relação a seus valores de *inputs* e *outputs* e suas respectivas eficiências.

O primeiro exemplo refere-se ao exemplo ilustrativo demonstrado no Curso de Análise de Envoltória de Dados, publicado no XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, realizado entre os dias 27 e 30/09/05 em Gramado, RS. Este Curso de Análise de Envoltória de Dados tem como objetivo estudar processos de produção que usem múltiplos recursos (por exemplo, mão-de-obra, vários tipos de ligas metálicas, peças de terceiros e energia) e tenham como resultado mais de um produto (carros de modelo popular, modelo médio vans e modelo de luxo, por exemplo). O exemplo a seguir é apenas ilustrativo (como mostra a tabela 4, com dados do exemplo numérico, citado no trabalho de Mello et al, 2005) e tem como objetivo medir a eficiência de cada unidade produtiva (DMU) – A, B, C, D, E.

A Tabela 4 apresenta um conjunto de cinco DMUs A, B, C, D e E que empregam dois *inputs* e um *output* em seu processo produtivo. (Mello et al, 2005)

Tabela 4. Dados do exemplo numérico.

DMU	Input 1	Input 2	Output
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8

De acordo com os valores apresentados na tabela acima e com o programa anterior abordado para o modelo CCR orientado a *input*, temos que informar ao programa a matriz relacionada ao vetor de output e, em seguida, o vetor de input. Resolvendo o exemplo numérico acima, através do programa da interface do Matlab com o Lindo, temos os seguintes valores:

Tabela 5. Resultados dos pesos de cada DMU e suas respectivas eficiências I.

DMU	Input 1	Input 2	Output	Input 1	Input 2	Output	Eficiência (%)
A	4	3	2	0,045	0,273	0,227	45,45
B	1	6	5	1,000	0,000	0,200	100,00
C	2	3	4	0,250	0,167	0,250	100,00
D	1	2	1	0,429	0,286	0,429	42,86
E	10	5	8	0,000	0,200	0,125	100,00

Portanto, de acordo com os resultados acima encontrados, podemos observar que as DMUs B, C e E são eficientes.

O segundo exemplo foi reproduzido do trabalho “A Avaliação da Eficiência do Processo de Manufatura Celular: um Modelo Aplicado a uma Empresa de Produção de Pilhas”, referente ao problema da Dissertação de Mestrado do aluno Marcos Roberto Gois de Oliveira, defendida no Programa de Pós graduação da UFPE, no ano 2000. O objetivo central da sua dissertação era identificar uma metodologia que pudesse avaliar o desempenho operacional das células de manufatura através da medida da taxa de eficiência de cada célula para o caso da Microlite S.A., de forma a fornecer informações importantes e suporte às decisões gerencias que corroborarão para o incremento do desempenho de cada célula. (Oliveira, 2000)

Sejam as DMU’s Litografia, Estamparia, Mistura Preta, Papel Eletrolítico, R-6, R-14 e R-20 abaixo relacionadas, com as quantidades de mão-de-obra, matéria-prima e produção, respectivamente. Os valores da tabela 6 a seguir são fictícios, cujo objetivo é o de ilustrar a aplicação da AED. Mão-de-obra e matéria-prima são *inputs* enquanto a produção é um *output*. (Oliveira, 2000)

Tabela 6. Dados das células de manufatura.

DMU	*Inputs*		*Output*
	Mão-de-obra	Matéria-prima	Produção
Litografia	125	50	18
Estamparia	44	20	17
Mistura Preta	80	46	15
Papel eletrolítico	25	79	25
R – 6	89	21	16
R – 14	51	26	12
R – 20	76	38	18

A formulação apresentada a seguir mostra a representação do PPL para o modelo *CCR orientado a input dos multiplicadores* para a DMU Litografia. Os demais PPL’s (Estamparia, Mistura Preta, Papel eletrolítico, R – 6, R – 14, R – 20) seguem a mesma estrutura de programação linear, modificando apenas a função objetivo e a primeira restrição dos respectivos PPL’s. no entanto esta formulação é apenas um entendimento de como funciona o PPL para a DMU Litografia, uma vez que o programa utilizado neste trabalho facilita-nos a programação, pois é necessário apenas a matriz de *inputs* e *outputs* relacionados.

- PPL para DMU Litografia:

$$Max\ Eff_{litografia} = 18u_1$$

sujeito a

$$125v_1 + 50v_2 = 1$$

$$18u_1 - 125v_1 - 50v_2 \leq 0$$
$$17u_1 - 44v_1 - 20v_2 \leq 0$$
$$15u_1 - 80v_1 - 46v_2 \leq 0$$
$$25u_1 - 25v_1 - 79v_2 \leq 0$$
$$16u_1 - 89v_1 - 21v_2 \leq 0$$
$$12u_1 - 51v_1 - 26v_2 \leq 0$$
$$18u_1 - 76v_1 - 38v_2 \leq 0$$
$$u_1, v_1, v_2 \geq 0$$

Resolvendo a matriz relacionada a tabela 6 com dois *inputs* e um *output*, utilizando o mesmo programa citado no problema anterior, temos:

Tabela 7. Resultados de cada DMU e suas respectivas eficiências II.

DMU	Input 1	Input 2	Output	Input 1	Input 2	Output	Eficiência (%)
Litografia	125	50	18	0,000	0,020	0,023	42,35
Estamparia	44	20	17	0,000	0,050	0,059	100,00
Mistura Preta	80	46	15	0,009	0,007	0,030	45,32
Papel eletrolítico	25	79	25	0,040	0,000	0,040	100,00
R – 6	89	21	16	0,000	0,048	0,056	89,64
R – 14	51	26	12	0,014	0,011	0,049	58,99
R – 20	76	38	18	0,009	0,008	0,033	59,71

Portanto, de acordo com os resultados acima encontrados, podemos observar que as DMUs “Estamparia” e “Papel Eletrolítico” são eficientes.

O terceiro e último exemplo de aplicação é o referente ao problema do capítulo 9 do livro Introdução à Análise Envoltória de Dados – Teoria, Modelos e Aplicações. O exemplo tem como objetivo analisar o posicionamento competitivo de um conjunto de 15 empresas, entre as 500 maiores publicadas pela Revista Fortune, em 1995. No referido estudo, as entradas são os Ativos Totais, os Passivos Não Exigíveis (PassivosNE) e o número de Empregados, e as saídas são as Receitas Brutas e os Lucros, em 1995, dessas 15 empresas. (Ferreira & Gomes, 2009)

A Tabela 8 apresenta um conjunto de quinze unidades produtivas - DMUs que empregam três *inputs (Insumos)* e dois *outputs (Produtos)* em seu processo produtivo.

Tabela 8: Exemplo de aplicação do capítulo 9 do livro de Ferreira & Gomes, 2009

	INSUMOS			PRODUTOS	
Empresa (DMU's)	**Ativo**	**Passivo NE**	**Empregados**	**Receita**	**Lucro**
1. Mitsubishi	91.920,60	10.950,00	36.000,00	184.365,20	346,20

2. Mitsui	68.770,90	5.553,90	80.000,00	181.518,70	314,80
3. Itochu	65.708,90	4.271,10	7.182,00	169.164,60	121,20
4. General Motors	217.123,40	23.345,50	709.000,00	168.828,60	6.880,70
5. Sumitomo	50.268,30	6.681,00	6.193,00	167.530,70	210,50
6. Marubeni	71.439,30	5.329,10	6.702,00	161.057,40	156,60
7. Ford Motor	243.283,00	24.547,00	346.990,00	137.137,00	4.139,00
8. Toyota Motor	106.004,20	49.691,00	146.855,00	111.052,00	2.662,40
9. Exxon	91.296,00	40.436,00	82.000,00	110.009,00	6.470,00
10. Royal Dutch/ Shell Group	118.011,60	58.986,40	104.000,00	109.833,70	6.904,60
11. Wal-Mart	37.871,00	14.762,00	675.000,00	93.627,00	2.740,00
12. Hitachi	91.620,00	29.907,20	331.852,00	84.167,10	1.468,80
13. Nippon Life Insurance	364.762,50	2.241,90	89.690,00	83.206,70	2.426,60
14. Nippon Telegraph and Telefone	127.077,30	42.240,10	231.400,00	81.937,20	2.209,10
15. AT&T	88.884,00	17.274,00	299.300,00	79.609,00	139,00

Utilizando o mesmo programa dos exemplos anteriores, informando ao MATLAB apenas os valores de *outputs* e *inputs* da matriz da tabela 8, seguem abaixo na tabela 9 os resultados dos pesos para os três *inputs* e os dois *outputs*, e suas respectivas eficiências, calculados através da interface entre o MATLAB e o LINDO:

Tabela 9: Resultados de cada DMU e suas respectivas eficiências III.

	INSUMOS (Coeficientes)			**PRODUTOS (Coeficientes)**		
Empresa (DMU's)	**Ativo**	**Passivo NE**	**Empregados**	**Receita**	**Lucro**	**Eficiência**
1. Mitsubishi	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	**66,28%**
2. Mitsui	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0004	**100%**
3. Itochu	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	**100%**
4. General Motors	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	**100%**
5. Sumitomo	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	**100%**
6. Marubeni	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0015	**96,45%**
7. Ford Motor	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	**73,72%**
8. Toyota Motor	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	**52,46%**
9. Exxon	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	**100%**
10. Royal Dutch/ Shell Group	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	**84,14%**
11. Wal-Mart	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	**100%**
12. Hitachi	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	**38,61%**
13. Nippon Life Insurance	0,0000	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	**100%**
14. Nippon Telegraph and Telefone	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	**34,86%**
15. AT&T	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	**27,04%**

Portanto, de acordo com os resultados acima realizados, podemos observar que as DMUs “Mitsui”, “Itochu”, “General Motors”, “Sumitomo”, “Marubeni”, “Exxon”, “Wal-Mart” e “Nippon Life Insurance” são eficientes.

Concluímos então que estes resultados das eficiências acima apresentados são satisfatórios, uma vez que as mesmas foram idênticas às apresentadas nos respectivos trabalhos discutidos anteriormente. Portanto, esta implementação de uma interface do MATLAB com o LINDO nos trouxe vantagem, pois não necessitamos gastar tanto tempo implementando cada DMU separadamente para obtermos as eficiências, mas sim a implementação de um único programa para medir todas estas eficiências.

4. Considerações Finais

A escolha do assunto Análise Envoltória de Dados como tema desta monografia nos encantou pelo fato de tratar-se de um método revolucionário no universo estatístico do futuro, pois, sendo uma técnica não paramétrica, dispensa os testes estatísticos usuais (uma vez que este método para os estatísticos é interpretado como uma análise exploratória de dados). Outro dado importante seria a capacidade deste em modelar a complexidade do mundo real, facilitando assim a vida de qualquer estudioso que queira medir a eficiência de unidades produtivas – DMU's.

Mesmo tendo conhecimento da existência de métodos para tornar as DMU's ineficientes em eficientes, não encontramos metodologia adequada para tal, pela escassez de trabalhos publicados referente ao assunto, o que nos impulsiona e encoraja à pesquisas posteriores. Dificuldade semelhante foi encontrada quando pesquisamos o modelo BCC, pois sua aplicação era puramente teórica. Por isso os exemplos de aplicação desenvolvidos foram apenas voltados ao modelo CCR.

Os exemplos aplicados no modelo CCR multidimensional da AED orientado a *inputs*, foram anteriormente desenvolvido por muitos trabalhos científicos por nós pesquisados, aonde os softwares utilizados eram o Excel, o SIAD e o próprio LINDO. O diferencial do nosso trabalho se ateve ao desenvolvimento da interface entre os softwares Matlab e Lindo.

Pelo fato deste assunto não constar na grade curricular do curso de Estatística da Universidade Federal da Paraíba e por ser pioneiro no Departamento de Estatística, tornou-se um verdadeiro desafio da minha parte como aluna desta instituição de ensino. Salientamos ainda que, este trabalho enriqueceu bastante meus conhecimentos acadêmicos.

Como proposta, sugerimos ao Departamento de Estatística da Universidade Federal da Paraíba, a implantação do assunto da nossa monografia na grade curricular.

Referências bibliográficas

LINS, M. P. E.; CALÔBA, G. M.; **Programação Linear com aplicações em teria dos jogos e avaliação de desempenho (data envolopment analysis)**. 1ª Ed., Rio de Janeiro, Editora Interciência, 2006.

FERREIRA, C. M. C.; GOMES, A. P.; **Introdução à Análise Envoltória de Dados**. 22ª Ed., Viçosa, MG, Editora UFV, 2009

FERREIRA, A. B. H.; **Dicionário Aurélio Escolar da Língua Portuguesa**. 1ª Ed., Rio de Janeiro, Editora Nova Fronteira, 1988.

COLIN, E. C.; **Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégias, finanças, logística, produção, marketing e vendas**. 1ª Ed., Rio de Janeiro, Editora LTC, 2007.

LUENBERGER, D. G.; **Linear and Nonlinear Programming**. Second Edition, Canadá, Editora Addison Wesley, 1989.

LACHTERMACHER, G.; **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões: para cursos de Administração, Economia e Ciências Contábeis**. 3ª Ed., Rio de Janeiro, Editora Elsevier, 2007.

TAHA, H. A.; **Pesquisa Operacional: uma visão geral**. 8ª Ed., São Paulo, Editora Pearson Prentice Hall, 2008.

MELLO et. al., **Curso de Análise de Envoltória de Dados**. ANAIS do XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), Gramado, RS, 2005.

Almeida, J. E.; **Estatística Não-paramétrica**. 111p.

EHRLICH, P.J. **Fronteira eficiente: análise envoltória de dados**. Disponível em HTTP://www.fgvsp.br/academico/professores/Pierre_J_Ehrlich/FronteiraEficiente.pef. Acessado em: 2011. 15p.

MARINHO, A.; FAÇANHA, L. O. **Programas sociais: efetividade, eficiência e eficácia como dimensões operacionais da avaliação**. Texto para Discussão nº 787, IPEA, 2001. 22p.

MACEDO, M. A. S.; BENGIO, M. C.. **Avaliação de Eficiência Organizacional através de Análise Envoltória de Dados**. Disponível em https://encrypted.google.com/search?hl=ptvBR&source=hp&biw=1436&bih=715&q=Avalia%C3%A7%C3%A3o+de+Efici%C3%AAncia+Organizacional+atrav%C3%A9s+de+An%C3%A1lise+Envolt%C3%B3ria+de+Dados&aq=f&aqi=&aql=&oq=. Acessado em: abril de 2011.16p.

Casado, F. L.; Souza, A. M. **Análise Envoltória de Dados: conceitos, metodologia e estudo da arte na Educação Superior**. Disponível em http://w3.ufsm.br/adriano/mon/fc.pdf . Acessado em: março de 2011.

OLIVEIRA, M. R. G. – **A Avaliação da Eficiência do Processo de Manufatura Celular: um Modelo Aplicado a uma Empresa de Produção de Pilhas**. Recife: In.n., 2000. Dissertação apresentada à Fac. De Administração da Universidade Federal de Pernambuco.