

**UFPB – UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CCEN – CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA**

**JOSEMIR RAMOS DE ALMEIDA**

**MODELAGEM DA SÉRIE DE PACIENTES ACOMETIDOS POR ACIDENTE  
VASCULAR CEREBRAL EM JOÃO PESSOA-PB**

João Pessoa - PB  
Julho / 2010

**JOSEMIR RAMOS DE ALMEIDA**

**MODELAGEM DA SÉRIE DE PACIENTES ACOMETIDOS POR ACIDENTE  
VASCULAR CEREBRAL EM JOÃO PESSOA-PB**

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação  
em Estatística da Universidade Federal da  
Paraíba, como requisito parcial para obtenção  
do título de Bacharel.

Orientador: Prof. Doutor Eufrásio de Andrade Lima Neto  
Área de concentração: Séries Temporais

João Pessoa - PB  
Julho / 2010

**JOSEMIR RAMOS DE ALMEIDA**

**MODELAGEM DA SÉRIE DE PACIENTES ACOMETIDOS POR ACIDENTE  
VASCULAR CEREBRAL EM JOÃO PESSOA-PB**

Aprovado em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Doutor Eufrásio de Andrade Lima Neto  
Universidade Federal da Paraíba

---

Prof. Doutor Ulisses Umbelino dos Anjos  
Universidade Federal da Paraíba

---

Prof<sup>a</sup>. Doutora Renata Patrícia Lima Jerônimo  
Universidade Federal da Paraíba

João Pessoa - PB  
Julho / 2010

## **Agradecimentos**

- Em primeiro lugar agradeço a Deus pai todo poderoso, por me fortalecer e me abençoar em todos os momentos da minha vida.
- Aos meus pais, Josafá e Maria de Lourdes, que são meus alicerces e sempre estiveram do meu lado em todos os momentos da minha vida, educando-me e fazendo de mim essa pessoa que sou.
- A minha irmã Mercicleide, que sempre esteve ao meu lado me dando apoio para conseguir meus objetivos pessoais e profissionais.
- A minha noiva Elisângela, por me apoiar e me alicerçar nos momentos de dificuldades e alegrias durante todo esse tempo que estamos juntos.
- Ao grande Professor Eufrásio de Andrade Lima neto, por me orientar neste projeto, bem como pela paciência durante esse e outros projetos, frutos da minha vida acadêmica.
- Aos Professores Ulisses Umbelino dos Anjos e Renata Patrícia Lima Jerônimo que aceitaram o convite para participar da banca examinadora.
- Aos demais professores do Departamento de Estatística pelos ensinamentos e conhecimento que me proporcionaram durante toda graduação.
- Aos meus colegas, Marcilio Regis, Pedro Rafael, Lenilson Rodrigues, Anna Paola Bezerra, Julice Soares, Tiê Dias, Everlane Suane, Abner, Telmo Cristiano, Danillo Fagner, Rodrigo Cabral, Adeilda Fernandes, Lerivam Ferreira, por terem sido grandes parceiros durante a graduação.
- Aos demais colegas de curso, que nos tornamos grandes amigos e futuros companheiros de trabalho.
- Aos colegas, Fábio Azevedo, Rivelino Gomes e Rodrigo Lins da Universidade Estadual da Paraíba pelos trabalhos que desenvolvemos.
- Aos colegas da Secretaria de Saúde, em especial a Adeilda Fernandes e a Bergson, pela paciência de ensinar o que precisava para desempenhar minha função da melhor maneira possível. Agradeço também a Mércia e Alessandro pela oportunidade de poder trabalhar na diretoria de regulação bem como aos demais colegas por serem grandes parceiros de trabalho.

*"Mil poderão cair ao teu lado, e dez mil à tua direita; mas tu não serás atingido."*

*(Salmo 91:7)*

## Resumo

O Acidente Vascular Cerebral (AVC) é uma das doenças que mais mata no Brasil. Segundo dados do Ministério da Saúde, entre 2000 e 2004, 317.998 pessoas vieram a óbito em decorrência de AVC. Neste contexto, uma informação importante para a secretaria de saúde de João Pessoa é a previsão do número de pacientes que serão atendidos nos hospitais filiados ao Sistema Único de Saúde (SUS), em João Pessoa, decorrentes de AVC. O presente estudo tem por objetivo fazer uso dos modelos de Holt-Winters e Box-Jenkins para séries temporais, com o intuito de modelar o número de pacientes atendidos no período de janeiro de 2000 a março de 2010, bem como realizar previsões para meses posteriores. Para o mês de Abril/2010, observou-se que as previsões realizadas para a série AVC pelos modelos ARIMA(1,1,1) e ARIMA(2,1,1) estiveram próximas do valor observado.

**Palavras-chave:** Acidente vascular cerebral, Séries temporais, Previsão.

## Lista de Figuras

|  |    |
|--|----|
| 1- Acidente vascular cerebral isquêmico .....  | 02 |
| 2- Acidente vascular cerebral hemorrágico .....  | 02 |
| 3- Série “Tratamento em acidente vascular cerebral (AVC)” .....  | 34 |
| 4- Gráfico decomposto em: série AVC, componente sazonal, tendência, resíduos .....                     | 34 |
| 5- Gráfico de autocorrelação parcial da série AVC .....  | 35 |
| 6- Gráfico da série AVC aplicada uma diferença simples .....   | 36 |
| 7- Gráfico de autocorrelação da série AVC após aplicar uma diferença simples .....                     | 37 |
| 8- Gráfico de autocorrelação parcial da série AVC após aplicar uma diferença simples .....             | 37 |
| 9- Gráfico decomposto em resíduos padronizados, autocorrelação dos resíduos e teste de Ljung-Box ..... | 39 |

## Lista de Tabelas

|   |    |
|---|----|
| 1- Estimativas dos Parâmetros do modelo de Holt-Winters .....           | 35 |
| 2- Modelos com menores critérios de Informação.....                     | 38 |
| 3- P-valores para o teste de normalidade dos resíduos .....             | 38 |
| 4- Medidas de erros para os modelos de Holt-Winters e Box-Jenkins ..... | 40 |
| 5- Previsões para três passos a frente .....                            | 40 |
| 6- Previsões para seis passos a frente .....                            | 41 |



## SUMÁRIO

|  |      |
|--|------|
| <b>RESUMO</b> .....  | VI   |
| <b>LISTA DE FIGURAS</b> .....                              | VII  |
| <b>LISTA DE TABELAS</b> .....                              | VIII |
| <b>1. INTRODUÇÃO</b> .....                                 | 01   |
| <b>2. PROBLEMATIZAÇÃO</b> .....                            | 02   |
| <b>3. METODOLOGIA</b> .....                                | 05   |
| 3.1 Definição de série temporal .....                      | 05   |
| 3.2 Objetivo da análise de séries temporais .....          | 05   |
| 3.3 Tendência .....  | 06   |
| 3.4 Estacionariedade .....                                 | 06   |
| 3.4.1 Teste de Dickey-Fuller para estacionariedade .....   | 07   |
| 3.5 Transformações .....                                   | 08   |
| 3.6 Métodos de Previsão de Séries Temporais .....          | 08   |
| 3.7 Técnicas Descritivas .....                             | 09   |
| 3.7.1 Decomposição Clássica .....                          | 09   |
| 3.7.2 Séries com Tendência .....                           | 10   |
| 3.8 Métodos de suavização .....                            | 10   |
| 3.8.1 Filtragem (Médias Móveis) .....                      | 10   |
| 3.8.2 Diferenciação .....                                  | 12   |
| 3.9 Séries com Sazonalidade .....                          | 13   |
| 3.10 Modelos de suavização exponencial .....               | 13   |
| 3.10.1 Séries localmente constantes .....                  | 14   |
| 3.10.2 Médias móveis simples (MMS) .....                   | 14   |
| 3.10.3 Suavização exponencial simples (SES) .....          | 14   |
| 3.10.3.1 Previsão .....                                    | 15   |
| 3.10.3.2 Especificação de $\alpha$ .....                   | 15   |
| 3.11 Modelos para séries que apresentam tendência .....    | 16   |
| 3.11.1 Suavização exponencial de Holt (SEH) .....          | 16   |
| 3.11.1.1 Previsão .....                                    | 16   |
| 3.12 Modelos para séries que apresentam sazonalidade ..... | 17   |

|  |           |
|--|-----------|
| 3.12.1 Suavização exponencial sazonal de Holt-Winters (HW) ..... | 17        |
| 3.12.1.1 Série com sazonalidade do tipo multiplicativa .....     | 17        |
| 3.12.1.2 Série com sazonalidade do tipo aditiva .....            | 18        |
| 3.12.1.3 Previsão .....  | 18        |
| 3.13. Modelos de Box-Jenkins .....                               | 19        |
| 3.13.1 Modelos lineares estacionários .....                      | 20        |
| 3.13.1.1 Processo linear geral .....                             | 20        |
| 3.13.1.2 Modelos auto-regressivos (AR) .....                     | 21        |
| 3.13.1.3 Modelos de médias móveis (MA) .....                     | 22        |
| 3.13.1.4 Modelos auto-regressivos de médias móveis (ARMA) .....  | 23        |
| 3.13.1.5 Função de autocorrelação parcial (facp) .....           | 24        |
| 3.14 Modelos não estacionários .....                             | 25        |
| 3.14.1 Modelos ARIMA .....                                       | 26        |
| 3.15 Etapas da metodologia Box-Jenkins .....                     | 27        |
| 3.16 Identificação de modelos .....                              | 27        |
| 3.16.1 Critérios de Seleção de Modelos .....                     | 28        |
| 3.16.2 Critério de informação de Akaike (AIC) .....              | 28        |
| 3.16.3 Critério de informação de Akaike corrigido (AICc) .....   | 29        |
| 3.16.4 Critério de informação Bayesiana (BIC) .....              | 29        |
| 3.16.5 Análise dos resíduos .....                                | 30        |
| 3.16.5.1 Teste de Ljung-Box .....                                | 31        |
| 3.16.6 Critérios de Previsão .....                               | 31        |
| <b>4. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>                          | <b>33</b> |
| 4.1 Ajuste do modelo de Holt-Winters .....                       | 33        |
| 4.2 Ajuste do modelo de Box-Jenkins .....                        | 35        |
| 4.3 Comparação dos modelos .....                                 | 39        |
| 4.4 Previsões Futuras .....                                      | 40        |
| <b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>                             | <b>42</b> |
| <b>REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO .....</b>                           | <b>43</b> |

## 1. Introdução

Para a realização deste trabalho, se fez necessário um vínculo temporário na secretaria municipal de saúde do município de João Pessoa-PB, na diretoria de regulação, tal que o período de tempo estabelecido se fizesse necessário para a realização do mesmo. Ao analisar os trabalhos desenvolvidos pela secretaria municipal de saúde, foi verificado que, dentre os estudos de interesse realizados, havia um que indicava altos índices de incidência. Este estudo se trata do número de pacientes acometidos por acidente vascular cerebral (AVC), atendidos no município de João Pessoa.

Tendo em vista os fatos mencionados, este trabalho visa analisar a série temporal composta pelos indivíduos atendidos nos hospitais do município de João Pessoa que sofreram AVC, bem como a previsão futura. As informações obtidas para o estudo foram coletadas no período de janeiro de 2000 a março de 2010, totalizando 123 informações mensais.

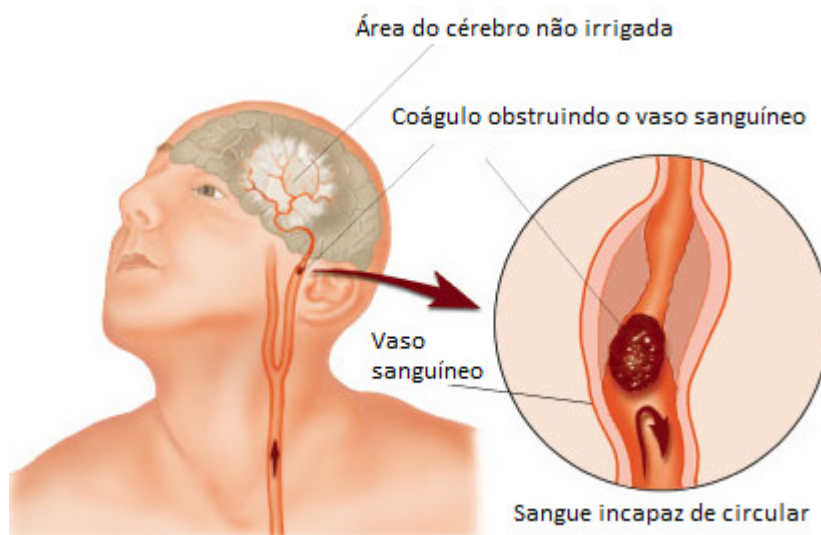
Esta monografia está dividida em cinco capítulos, incluindo o **Capítulo 1** de Introdução. No **Capítulo 2**, expomos algumas informações básicas a respeito do acidente vascular cerebral, para melhor compreensão do tema abordado, os objetivos do estudo e o software utilizado para obtenção da base de dados. No **Capítulo 3**, são abordadas algumas técnicas descritivas para análise de uma série temporal, definição e objetivos da análise de séries temporais, assim como os modelos utilizados no estudo e a metodologia abordada para a identificação e escolha do modelo mais adequado. Apresentamos no **Capítulo 4** os resultados e discussões a respeito da série em estudo. Finalmente, no **Capítulo 5** serão expostas as considerações finais.

## 2. Problematização

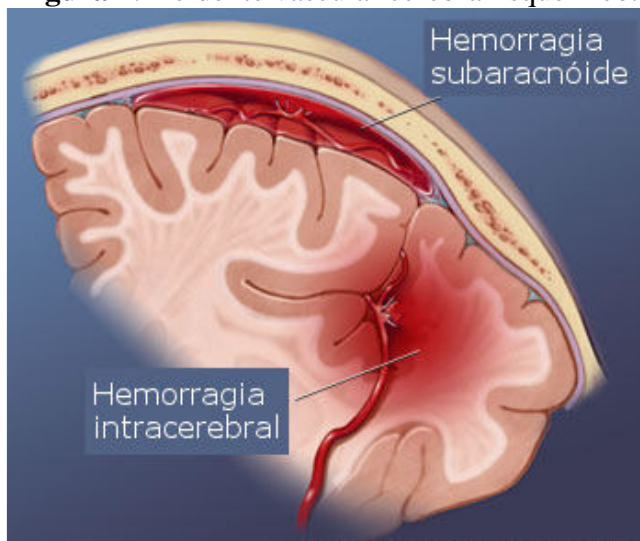
O AVC pode ser causado por 2 mecanismos distintos, por uma oclusão ou por uma hemorragia (COHEN, 2001).

Um **AVC isquêmico** (Figura 1) ocorre quando um vaso sanguíneo é bloqueado, frequentemente pela formação de uma placa aterosclerótica ou pela presença de um coágulo que chega através da circulação de uma outra parte do corpo (COHEN, 2001).

Um **AVC hemorrágico** (Figura 2) ocorre devido à ruptura de um vaso sanguíneo, ou quando a pressão no vaso faz com que ele se rompa devido à hipertensão. A hemorragia pode ser intracerebral ou subaracnóide. Em ambos os casos, a falta de suprimento sanguíneo causa enfarto na área suprida pelo vaso e as células morrem (COHEN, 2001).



**Figura 1:** Acidente vascular cerebral isquêmico.



**Figura 2:** Acidente vascular cerebral hemorrágico.

As manifestações clínicas subjacentes a esta condição incluem alterações das funções motora, sensitiva, mental, perceptiva, da linguagem, embora o quadro neurológico destas alterações possam variar muito em função do local e extensão exata da lesão (SULLIVAN, 1993).

Muitos fatores de risco contribuem para o seu aparecimento. Alguns desses fatores não podem ser modificados, como a idade, a raça, a constituição genética e o sexo. Outros fatores, entretanto, podem ser diagnosticados e tratados, tais como a hipertensão arterial, a diabetes *mellitus*, as doenças cardíacas, a enxaqueca, o uso de anticoncepcionais hormonais, a ingestão de bebidas alcoólicas, o fumo, o sedentarismo e a obesidade. A adequação dos hábitos de vida diária é primordial para a prevenção do AVC (BVS, 2010).

Segundo Sullivan (1993), este problema afeta na sua maioria os idosos, cerca de 20% dos indivíduos que sofreram AVC estão abaixo dos 65 anos, além disso, é uma patologia que atinge mais a raça negra, em particular as faixas etárias mais jovem.

Segundo dados do Ministério da Saúde, AVC e infarto estão entre as doenças que mais mata no Brasil. Fazendo um comparativo, entre 2000 e 2004, 317.998 pessoas vieram a óbito em decorrência do AVC, enquanto que infarto vitimou cerca de 308.944 indivíduos. Um fator importante que se esconde nesta questão é que as causas que levam às duas doenças são quase as mesmas (má alimentação, tabagismo, sedentarismo, entre outros). No entanto, como o AVC pode ter ultrapassado o infarto como principal causa de mortes no País? Segundo especialistas, o fato de o cérebro ser um órgão mais sensível que o coração é uma das causas. Contudo, esta justificativa não responde completamente a essa questão. Afirmam também que, falta basicamente, informação à população e um procedimento mais eficaz nas redes de saúde, em especial, na pública.

No município de João Pessoa, o número de pacientes que foram internos e vieram a óbitos em decorrência de acidente vascular cerebral em 2008 foi cerca de 340 indivíduos, onde 47,35% residiam na capital. Em 2009, cerca de 335 pacientes vieram a óbitos, sendo 43,28% residentes na capital e até março deste ano, 55 pacientes vieram a óbito, onde 38,18% residiam no município de João Pessoa (Fonte: TabWin/DATASUS).

A Secretaria Municipal de Saúde (SMS) de João Pessoa tem por responsabilidade a gestão plena do Sistema Único de Saúde (SUS) no âmbito municipal, além das ações e serviços de saúde oferecidos ao município. O órgão é responsável pela formulação e

implantação de políticas, programas e projetos que visem à promoção de uma saúde de qualidade ao usuário do SUS (SMS, 2010).

Neste contexto, uma informação importante para a secretaria de saúde é a previsão do número de pacientes que serão tratados em decorrência de AVC, para assim subsidiar os gestores na adoção de políticas públicas de saúde, bem como em medidas mais efetivas na rede assistencial.

Portanto, este trabalho tem como objetivo principal ajustar um modelo de séries temporais para a série do número de pacientes com AVC nos hospitais no município de João Pessoa e realizar previsões a curto e médio prazo. Para alcançar o objetivo principal deste trabalho, faz-se necessário que sejam atingidos os seguintes objetivos específicos:

- Ajuste dos modelos de Holt-Winters e Box-Jenkins;
- Seleção do modelo com melhor ajuste aos dados;
- Análise dos resíduos dos modelos;
- Cálculo dos erros de previsão;
- Estimativas de previsões futuras de 3 e 6 passos a frente.

A obtenção dos dados para série histórica do número de pacientes com AVC se deu através do programa TabWin. Este programa foi desenvolvido pelo Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde (DATASUS) com a finalidade de permitir às equipes técnicas do Ministério da Saúde, das Secretarias Estaduais e Municipais de Saúde a realização de tabulações rápidas sobre arquivos do tipo DBF.

Em seguida, as informações foram armazenadas em uma base de dados no pacote estatístico R ([www.r-project.org](http://www.r-project.org)) versão 2.11, no qual se procedeu a construção dos modelos bem como todos os procedimentos até a análise final deste trabalho.

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1 Definição de série temporal

A classe de fenômenos cujo processo observacional e consequente quantificação numérica gera uma sequência de dados distribuídos no tempo é denominada *série temporal* (SOUZA, 1989).

A natureza de uma série temporal e a estrutura de seu mecanismo gerador estão relacionadas com o intervalo de ocorrência das observações no tempo (ANDERSON, 1971). Caso o levantamento das observações da série possa ser feito a qualquer momento do tempo, a série temporal é dita *contínua*, sendo denotada por  $Z(t)$  (GRANGER, 1977). No entanto, segundo Granger (1977) e Nelson (1973), as observações são tomadas, na maioria das vezes, em intervalos de tempo equidistantes e discretos.

Uma série temporal *discreta* pode ser representada por  $Z_t = \{z_1, z_2, \dots, z_t\}$ , sendo que cada observação discreta  $z_t$  está associada a um instante de tempo distinto, existindo uma relação de dependência serial entre essas observações (SOUZA, 1989).

#### 3.2 Objetivo da análise de séries temporais

Segundo Granger (1977), o objetivo inicial da análise de séries temporais é a realização de inferências. Assim, através da abstração de regularidades contidas nos fenômenos observáveis de uma série temporal existe a possibilidade de se construir um modelo matemático como uma representação simplificada da realidade (BARBANCHO, 1970).

Após a formulação do modelo matemático, obtido pela seleção entre as alternativas de classes de modelos identificadas como apropriadas para essa representação e subsequente estimação de seus parâmetros, é possível utilizá-lo para testar alguma hipótese ou teoria a respeito do mecanismo gerador do processo estocástico e realizar a previsão de valores futuros da série temporal (GRANGER, 1977).

### 3.3 Tendência

Globalmente, uma série pode exibir tendência de crescimento (ou decréscimo) com vários possíveis padrões (EHLERS, 2007) :

- Crescimento linear: por exemplo, a cada ano o aumento esperado nas vendas de certo brinquedo é de 1 milhão de reais.
- Crescimento exponencial: por exemplo, a cada ano as vendas de certo brinquedo aumentam a um fator 1,3.
- Crescimento amortecido: por exemplo, as vendas de certo brinquedo tem um aumento esperado de 70% sobre o ano anterior. Se o aumento esperado for de 1 milhão de reais no primeiro ano, no segundo ano será de 700 mil reais, no terceiro ano será de 490 mil reais e assim por diante (EHLERS, 2007).

### 3.4 Estacionariedade

Uma das suposições mais frequentes a respeito de uma série temporal é a de que ela é estacionária, ou seja, ela se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável. Todavia, a maior parte das séries que encontramos na prática apresentam alguma forma de não-estacionariedade. Assim as séries econômicas e financeiras apresentam em geral *tendências*, sendo o caso mais simples aquele em que a série flutua ao redor de uma reta, com inclinação positiva ou negativa (tendência linear). Podemos ter, também, uma forma de não-estacionariedade explosiva, como no caso do crescimento de uma colônia de bactérias (MORETTIN & TOLOI, 2005).

Como a maioria dos procedimentos de análise estatística de séries temporais supõem que estas sejam estacionárias, será necessário transformar os dados originais, se estes não forem estacionários. A transformação mais comum consiste em tomar *diferenças* sucessivas da série original, até se obter uma série estacionária. Em situações normais, será suficiente tomar uma ou duas diferenças para que a série se torne estacionária (MORETTIN & TOLOI, 2005).



### 3.4.1 Teste de Dickey-Fuller para estacionariedade

Basicamente, o teste de raiz unitária Dickey-Fuller (DF) estima a seguinte auto-regressão:

$$\Delta Z_t = (\rho - 1)Z_{t-1} + \varepsilon_t,$$

ou então,

$$\Delta Z_t = \gamma Z_{t-1} + \varepsilon_t,$$

onde  $\Delta = (Z_t - Z_{t-1})$ , ou seja, é o operador diferença e  $\gamma = \rho - 1$ . Nesse caso, a hipótese nula ( $H_0$ ) é de que exista pelo menos uma raiz unitária, logo a variável não é estacionária e  $\gamma = 0$ . Por sua vez, a hipótese alternativa ( $H_1$ ) é que a variável seja fracamente estacionária. Neste caso não há nenhuma raiz unitária e conseqüentemente  $\gamma < 0$  (MARGARIDO, 2006).

Dado uma amostra  $Z_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , o teste de Dickey-Fuller se baseia no estimador de mínimos quadrados

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n Z_{t-1} Z_t}{\sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2}.$$

Logo, para testar as hipóteses do modelo, utiliza-se a estatística proposta por Dickey & Fuller (1979), dada por

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\rho} - 1}{S(\hat{\rho})},$$

onde

$$S(\hat{\rho}) = \frac{S}{\left(\sum_{t=2}^n Z_{t-1}^2\right)^{1/2}},$$

e

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=2}^n (Z_t - \hat{\rho} Z_{t-1})^2,$$

onde  $S(\hat{\rho})$  é o erro padrão de  $\hat{\rho}$  e  $S^2$  é o estimador de  $\sigma^2$  (mais detalhes em Said e Dickey (1984) e Chang e Park (2003)).

Assim, se o valor absoluto da estatística  $\hat{\tau}$  estimado para o parâmetro de  $Z_{t-1}$  for menor que o valor absoluto da estatística  $\tau$ , então não há evidências para rejeição da hipótese nula.

### 3.5 Transformações

Segundo Morettin & Toloí (2005), no contexto de séries temporais existem, basicamente, duas razões para se transformar os dados originais: estabilizar a variância e tornar o efeito sazonal aditivo. Entretanto, Nelson (1976) afirma que transformações não melhoram a qualidade de previsão do modelo. No caso de séries econômicas e financeiras poderá ser necessário aplicar alguma transformação à série original, como por exemplo, a transformação de *Box-Cox* (1964)

$$Z_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{Z_t^\lambda - c}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log Z_t, & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Aqui  $\lambda$  e  $c$  são parâmetros a serem estimados. Outra razão para efetuar transformações é obter uma distribuição para os dados mais simétrica e próxima da normal (MORETTIN & TOLOI, 2005).

### 3.6 Métodos de Previsão de Séries Temporais

A previsão não constitui um fim em si, mas um meio de fornecer informações e subsídios para uma consequente tomada de decisão, visando atingir determinados objetivos (MORETTIN & TOLOI, 1981).

Souza (1989) e Wheelwright (1985) classificam as previsões de uma série temporal como de curto, médio ou longo prazo.

Naturalmente, a investigação do poder preditivo do modelo especificado como o mais adequado para explicar o mecanismo gerador das observações de uma série temporal é um processo empírico de verificação, visto que são feitas comparações entre as previsões e as observações, a fim de confirmar a habilidade do modelo matemático em descrever a estrutura definida pelos dados da série temporal analisada (BARBANCHO, 1970).

Os métodos de previsão de séries temporais baseiam suas previsões na extrapolação de características de observações passadas e no inter-relacionamento entre essas observações, fornecendo previsões acuradas se o futuro apresentar comportamento similar ao passado (WHEELWRIGHT, 1985).

Segundo Wheelwright (1985), os métodos de previsão estão fundamentados na hipótese de que os valores passados possuem informações a respeito do comportamento da série, tal que esse padrão é recorrente no tempo.

Há uma variedade enorme de métodos de previsão de séries temporais, cada qual com suas capacidades e limitações (WHEELWRIGTH, 1985). A escolha do método de previsão mais adequado depende de alguns fatores, como por exemplo, no conhecimento que se tenha sobre a natureza e o objetivo da análise.

### 3.7 Técnicas Descritivas

Certos padrões de comportamento para séries temporais podem ser descritos utilizando uma representação gráfica dos dados ao longo do tempo, como por exemplo, pontos aberrantes, tendências, sazonalidade ou alterações na estrutura da série. Tendo em vista tais fatores, pode-se afirmar que a análise gráfica é um bom início que antecede a análise da série.

#### 3.7.1 Decomposição Clássica

Em uma série temporal  $Z_t$ ,  $t = 1, 2, 3, \dots, N$ , pode-se observar certas propriedades adotando-se uma forma de decomposição que consiste em escrever a série como uma soma de três componentes não observáveis, ou seja,

$$Z_t = T_t + S_t + a_t, \quad (3.1)$$

onde  $T_t$  é a componente de tendência,  $S_t$  é a componente de sazonalidade e  $a_t$  é uma componente aleatória ou ruído, ou seja, a componente que não pode ser explicada e que espera-se ser aleatória e ainda possui média zero e variância constante igual a  $\sigma_a^2$ . Podemos destacar também que a componente sazonal se repete a cada intervalo fixo de tempo  $s$ , isto é,

$$\dots = S_{t-2s} = S_{t-s} = S_t = S_{t+s} = S_{t+2s} = \dots \quad (3.2)$$

Portanto, variações periódicas no tempo podem ser observadas através desta componente.

Pode-se estimar uma série livre de sazonalidade se considerarmos um modelo do tipo (3.1), ou seja, se  $\hat{S}_t$  for uma estimativa de  $S_t$ , então teremos

$$Z_t^{SA} = Z_t - \hat{S}_t, \quad (3.3)$$

que é a série sazonalmente ajustada.

Por conseguinte, estimando-se a tendência ( $T_t$ ) e a sazonalidade ( $S_t$ ) e posteriormente subtraindo de  $Z_t$  teremos uma estimativa de  $a_t$ .

### 3.7.2 Séries com Tendência

Segundo Ehlers (2007), a tendência pode ser observada como uma mudança de longo prazo no nível médio da série. A compreensão de “longo prazo” depende, em parte, do comprimento da série observada. Um exemplo seria as atuais mudanças climáticas, tais como o aquecimento global que podem ser descritas como uma tendência a longo prazo. Ao considerarmos o modelo

$$Z_t = T_t + a_t, \quad (3.4)$$

salientamos que existem tendências do tipo global, local, não-lineares, com crescimento exponencial e ainda tendência quadrática. A tendência pode ser estimada através de várias formas, dentre as quais pode-se citar:

1. através da estimação através de um polinômio;
2. através de métodos de suavização;
3. obtendo diferenças na série ( $\Delta Z_t$ );
4. através de do método dos mínimos quadrados ponderados.

Logo, a série livre de tendência pode ser escrita com sendo,

$$Y_t = Z_t - \hat{T}_t. \quad (3.5)$$

## 3.8 Métodos de suavização

### 3.8.1 Filtragem (Médias Móveis)

Outra forma de se analisar séries com tendência consiste em fazer uso de um *filtro linear*, ou seja, a conversão de uma série  $Z_t$  em outra série  $Z_t^*$ . Logo:

$$Z_t^* = f(Z_t), t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.6)$$

onde o modelo (3.4), transformado pelo filtro linear ( $f$ ), é dado por

$$Z_t^* = T_t^* + a_t^*, \quad (3.7)$$

sendo  $T_t^* = f(T_t)$  e  $a_t^* = f(a_t)$ .

O *filtro linear* converte a série  $Z_t$  através da seguinte operação

$$Z_t^* = \sum_{j=-n}^n c_j Z_{t+j}, \quad t = n+1, n, \dots, N-n, \quad (3.8)$$

onde  $c_j$  é um conjunto de pesos com  $\sum_{j=-n}^n c_j = 1$ . Note que há perda de  $n$  observações no início e  $n$  observações no final da série inicial. Tem-se também que  $Z_t^*$  será uma estimativa de tendência no instante  $t$  e, neste caso, dizemos que a operação (3.8) é chamada de *médias móveis*.

Caso a série temporal apresente aleatoriedade ou pequenas mudanças nos padrões, um número maior de valores pode ser utilizado no cálculo da média móvel. No entanto, se houver pouca flutuação aleatória ou mudança significativa no padrão da série, um número menor de observações deve ser incluído no conjunto de valores empregado na determinação da média móvel.

A situação mais simples é quando os pesos  $c_j$  possuem o mesmo valor. Como  $\sum_{j=-n}^n c_j = 1$ , segue que  $c_j = 1/(2n+1)$ , para  $j = -n, \dots, n$ . Neste caso tem-se

$$Z_t^* = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n Z_{t+j}. \quad (3.9)$$

Note que,

$$Z_t^* = \sum_{j=-n}^n c_j Z_{t+j} = \sum_{j=-n}^n c_j (T_{t+j} + a_{t+j}) = \sum_{j=-n}^n c_j T_{t+j} + \sum_{j=-n}^n c_j a_{t+j}$$

ou seja,

$$Z_t^* = \sum_{j=-n}^n c_j T_{t+j} + a_t^*, \quad (3.10)$$

onde

$$a_t^* = \sum_{j=-n}^n c_j a_{t+j}. \quad (3.11)$$

Como  $E(a_t) = 0$ , então  $E(a_t^*) = 0$ . Portanto, temos que

$$E(Z_t^*) = \sum_{j=-n}^n c_j T_{t+j} \approx \sum_{j=-n}^n c_j T_t = T_t = E(Z_t), \quad (3.12)$$

onde se supomos uma tendência suave, então  $T_{t+j} \approx T_t$ . Logo a série suavizada e a série original terão praticamente a mesma média em cada tempo  $t$ . Além disso, tem-se que

$$\text{Var}(a_t^*) = \sigma_a^2 \left( \sum_{j=-n}^n c_j^2 \right), \quad (3.13)$$

desde que a  $\text{Var}(a_t)$  seja constante.

Podemos escrever a série livre de tendência como sendo igual a  $Y_t = Z_t - Z_t^*$  e  $E(Z_t - Z_t^*)$ , sendo o viés de estimação expresso por

$$v(t) = T(t) - \sum_{j=-n}^n c_j T_{t+j}. \quad (3.14)$$

### 3.8.2 Diferenciação

Outra maneira de remover uma componente de tendência é fazendo uso de outro tipo de filtro que consiste em tomar um número apropriado de diferenças, ou seja, diferenciar a série até que a mesma se torne estacionária. Se os dados não possuem um comportamento sazonal (tal definição será abordada a diante), então a primeira diferença em geral se torna suficiente para se ter estacionariedade na série.

Se tivermos

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

note que

$$\Delta T_t = T_t - T_{t-1} = (\beta_0 + \beta_1 t) - [\beta_0 + \beta_1 (t-1)] = \beta_1.$$

Ou seja, com uma diferença se elimina uma tendência linear.

Se  $T_t$  for dado por  $T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_m t^m$ , então

$$\Delta^d T_t = \begin{cases} d! \beta_d, & \text{se } m = d \\ 0, & \text{se } m < d \end{cases}. \quad (3.15)$$

Logo, para o modelo  $Z_t = T_t + a_t$ , teremos

$$\Delta^d Z_t = \Delta^d T_t + \Delta^d a_t, \quad (3.16)$$

com  $\Delta^d T_t$  dado anteriormente e sendo  $T_t$  um polinômio de grau  $m$ , onde

$$E(\Delta^d Z_t) = \begin{cases} \Delta^d T_t = k, & \text{se } m = d \\ 0, & \text{se } m < d \end{cases}. \quad (3.17)$$

Em séries econômicas que apresentam um crescimento exponencial, o procedimento mais adequado é tomar a diferença do logaritmo da série, i.e.

$$\Delta Z_t^* = \Delta \log Z_t. \quad (3.18)$$

### 3.9 Séries com Sazonalidade

Pode-se definir sazonalidade como sendo um comportamento “repetitivo” da série a cada  $s$  períodos de tempo. Como exemplos de séries com sazonalidade podemos citar, vendas mensais de material escolar que têm aumento nos meses finais e iniciais do ano, a venda mensal de brinquedos, com destaque para o mês de dezembro e possivelmente um leve aumento no mês de outubro, o aumento das vendas de passagens aéreas no verão, o aumento da produção de leite no Brasil nos meses de novembro, dezembro e janeiro, entre outros.

Dentre os modelos sazonais, podemos citar os modelos com:

- i) sazonalidade determinística;
- ii) sazonalidade estocástica.

Além disso, a sazonalidade pode ser apresentada de dois tipos:

1) Sazonalidade aditiva, quando as flutuações sazonais são mais ou menos constantes, independente do nível global da série.

2) Sazonalidade multiplicativa, quando dependendo do nível global da série, há uma variação no tamanho das flutuações sazonais.

Ajustar a série para a componente sazonal consiste em estimar  $S_t$  e subtrair a série estimada de  $Z_t$  no modelo

$$Z_t = T_t + S_t + a_t, t = 1, 2, \dots, N.$$

Isto é, o ajustamento sazonal consiste em calcular  $Z_t^{SA} = Z_t - \hat{S}_t$ .

### 3.10 Modelos de suavização exponencial

A popularidade desses métodos deve-se à sua simplicidade de implementação e pelo reduzido custo computacional. Além disso, seu poder de previsão é bem razoável. Dentre esses métodos destacamos o método de médias móveis simples (MMS), suavização exponencial simples (SES), suavização exponencial de Holt (SEH) e suavização exponencial sazonal de Holt-Winters (HW).

### 3.10.1 Séries localmente constantes

Consideremos, neste caso, uma série  $Z_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ , localmente constante composta apenas do nível mais um ruído branco, ou seja,

$$Z_t = \mu_t + a_t. \quad (3.19)$$

### 3.10.2 Médias móveis simples (MMS)

A finalidade deste método é considerar a média das observações passadas da série como base para previsão de um período futuro.

A expressão da média móvel para o período de tempo  $t$  é definida como

$$M_t = \frac{z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots + z_{t-r+1}}{r}, \quad (3.20)$$

ou

$$M_t = M_{t-1} + \frac{z_t - z_{t-r}}{r}, \quad (3.21)$$

onde  $r$  é o número de observações incluídas na média.

Utiliza-se o termo *média móvel*, pois à medida que acrescentamos uma nova observação na série, recalcula-se a média das observações e, em seguida, inclui-se esta nova observação na série e despreza a observação mais antiga.

Quanto maior for o número de observações incluídas na média, maior será o efeito de alisamento na previsão. Logo, caso a série apresente muita aleatoriedade ou pequenas mudanças no padrão, um maior número de valores pode ser utilizado no cálculo da média móvel.

### 3.10.3 Suavização exponencial simples (SES)

Dado o comportamento aleatório dos dados, o método de suavização exponencial simples se assemelha ao método de médias móveis. No entanto, a principal diferença entre eles é que o método de suavização exponencial atribui pesos diferentes a cada observação da série, supondo-se que as últimas observações possuem mais informações sobre o futuro da



série e, portanto, são mais relevantes para a previsão. Este método é adequado para séries que não apresentam sazonalidade nem tendência.

Portanto, dado a série  $Z_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ , podemos escrevê-la como sendo

$$\bar{Z}_t = b_0 z_t + b_1 z_{t-1} + b_2 z_{t-2} + \dots, \quad (3.22)$$

onde  $b_j$  são os pesos atribuídos as observações. Adotando também que  $b_0 > b_1 > b_2 > \dots$ , então os pesos decaem de forma tal que

$$b_k = \alpha(1 - \alpha)^k, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.23)$$

onde  $0 < \alpha < 1$  é chamada de constante de alisamento. Logo, a previsão dada um passo a frente no tempo  $t$  é dada por

$$\bar{Z}_t(1) = \alpha z_t + (1 - \alpha) \bar{z}_{t-1}, \bar{z}_0 = z_1, t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.24)$$

ou ainda

$$\bar{Z}_t(1) = \alpha \sum_{k=0}^t (1 - \alpha)^k z_{t-k} + (1 - \alpha)^t \bar{z}_0, \text{ em } t. \quad (3.25)$$

### 3.10.3.1 Previsão

Tomando  $\bar{z}_0(1) = z_1$ , como previsão inicial para  $t = 0$  e dado que a previsão dos valores futuros é dada pelo último valor suavizado, então

$$\bar{Z}_t(h) = \alpha z_t + (1 - \alpha) \bar{z}_{t-1}(h+1). \quad (3.26)$$

### 3.10.3.2 Especificação de $\alpha$

Vale salientar que o valor de  $\alpha$  não depende da escala em que as observações foram medidas, mas sim das propriedades da série temporal. O valor de  $\alpha$  deve ser especificado de modo a refletir a influência das observações passadas nas previsões. Valores pequenos produzem previsões que dependem de muitas observações passadas. Por outro lado, valores próximos de 1 levam a previsões que dependem das observações mais recentes e no caso extremo  $\alpha = 1$  a previsão é simplesmente a última observação.

Quanto menor for o valor de  $\alpha$  mais estável serão as previsões finais, uma vez que a utilização de baixo valor de  $\alpha$  implica que pesos maiores serão dados às observações passadas

e, por conseguinte, qualquer flutuação aleatória, no presente, exercerá um peso menor no cálculo de previsão. Em geral, quanto mais aleatória for a série estudada, menores serão os valores da constante de suavização (MORETTIN & TOLOI, 2005).

### 3.11 Modelos para séries que apresentam tendência

Neste caso, não se faz uso do modelo anteriormente citado, pois o mesmo não é adequado para analisar séries que apresentam tendência. Logo, consideremos uma série não sazonal composta de nível, tendência e ruído branco, ou seja,

$$Z_t = \mu_t + T_t + a_t. \quad (3.27)$$

#### 3.11.1 Suavização exponencial de Holt (SEH)

Quando é aplicado o método de suavização exponencial simples, há uma subestimação, ou superestimação, dos valores reais. Uma maneira de contornar esse tipo de situação é utilizar o método de suavização exponencial de Holt. Este método é similar à suavização exponencial simples, no entanto, a diferença está no uso de uma constante de suavização para modelar a tendência da mesma. Logo, o nível e a tendência são estimados, respectivamente, por

$$\bar{Z}_t = AZ_t + (1-A)\left(\bar{Z}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}\right), 0 < A < 1, t = 2, 3, \dots, N, \quad (3.28)$$

$$\hat{T}_t = C\left(\bar{Z}_t - \bar{Z}_{t-1}\right) + (1-C)\hat{T}_{t-1}, 0 < C < 1, t = 2, 3, \dots, N, \quad (3.29)$$

onde  $A$  e  $C$  são constantes de suavização.

##### 3.11.1.1 Previsão

Para um dado tempo  $t$ , a previsão do valor  $Z_{t+h}$ , é dada por

$$\hat{Z}_t(h) = \bar{Z}_t + h\hat{T}_t, h > 0. \quad (3.30)$$

Dada uma nova observação  $Z_{t+1}$ , então (3.28) e (3.29) são utilizadas para atualização da previsão, ou seja,

$$\bar{Z}_{t+1} = AZ_{t+1} + (1-A)\left(\bar{Z}_t + \hat{T}_t\right),$$

$$\hat{T}_{t+1} = C\left(\bar{Z}_{t+1} - \bar{Z}_t\right) + (1-C)\hat{T}_t.$$

### 3.12 Modelos para séries que apresentam sazonalidade

Para séries que apresentam sazonalidade dois dos métodos mais importantes são o método de Holt-Winters e o método de suavização exponencial geral. No entanto, neste trabalho apresentaremos apenas o método de Holt-Winters.

#### 3.12.1 Suavização exponencial sazonal de Holt-Winters (HW)

Winters (1960) estendeu o algoritmo de alisamento exponencial de Holt para séries que apresentassem sazonalidade. O método de Holt-Winters apresenta resultados similares ao alisamento exponencial de Holt, entretanto, é capaz de manipular séries temporais que apresentem tendência e sazonalidade.

##### 3.12.1.1 Série com sazonalidade do tipo multiplicativa

O método de Holt-Winters considera, neste caso, o fator sazonal como sendo multiplicativo e a tendência aditiva, isto é,

$$Z_t = \mu_t F_t + T_t + a_t, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (3.31)$$

As equações de suavização são dadas por

$$\hat{F}_t = D\left(\frac{Z_t}{\bar{Z}_t}\right) + (1-D)\hat{F}_{t-s}, \quad 0 < D < 1, \quad t = s+1, \dots, N, \quad (3.32)$$

$$\bar{Z}_t = A\left(\frac{Z_t}{\hat{F}_{t-s}}\right) + (1-A)\left(\bar{Z}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}\right), \quad 0 < A < 1, \quad t = s+1, \dots, N, \quad (3.33)$$

$$\hat{T}_t = C\left(\bar{Z}_t - \bar{Z}_{t-1}\right) + (1-C)\hat{T}_{t-1}, \quad 0 < C < 1, \quad t = s+1, \dots, N, \quad (3.34)$$

onde  $F_t$  é a estimativa do fator sazonal,  $\bar{Z}_t$  o nível,  $\hat{T}_t$  a tendência, e  $A, C$  e  $D$  as constantes de suavização.

### 3.12.1.2 Série com sazonalidade do tipo aditiva

Tomando (3.31) agora com o fator sazonal aditivo

$$Z_t = \mu_t + F_t + T_t + a_t, \quad (3.35)$$

então as estimativas  $F_t$ ,  $\bar{Z}_t$  e  $T_t$  são dadas por

$$\hat{F}_t = D \left( Z_t - \bar{Z}_t \right) + (1-D) \hat{F}_{t-s}, \quad 0 < D < 1, \quad (3.36)$$

$$\bar{Z}_t = A \left( Z_t - \hat{F}_{t-s} \right) + (1-A) \left( \bar{Z}_{t-1} + \hat{T}_{t-1} \right), \quad 0 < A < 1, \quad (3.37)$$

$$\hat{T}_t = C \left( \bar{Z}_t - \bar{Z}_{t-1} \right) + (1-C) \hat{T}_{t-1}, \quad 0 < C < 1. \quad (3.38)$$

### 3.12.1.3 Previsão

Para o caso da sazonalidade ser multiplicativa, então

$$\begin{aligned} \hat{Z}_t(h) &= \left( \bar{Z}_t + h \hat{T}_t \right) \hat{F}_{t+h-s}, \quad h = 1, 2, \dots, s \\ \hat{Z}_t(h) &= \left( \bar{Z}_t + h \hat{T}_t \right) \hat{F}_{t+h-2s}, \quad h = s+1, \dots, s \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.39)$$

e também

$$\begin{aligned} \hat{F}_{t+1} &= D \left( \frac{Z_{t+1}}{\bar{Z}_{t+1}} \right) + (1-D) \hat{F}_{t+1-s}, \\ \bar{Z}_{t+1} &= A \left( \frac{Z_{t+1}}{\hat{F}_{t+1-s}} \right) + (1-A) \left( \bar{Z}_t + \hat{T}_t \right), \\ \hat{T}_{t+1} &= C \left( \bar{Z}_{t+1} - \bar{Z}_t \right) + (1-C) \hat{T}_t. \end{aligned}$$

Já para o caso da sazonalidade aditiva, teremos

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_t(h) &= \bar{Z}_t + h\hat{T}_t + \hat{F}_{t+h-s}, h = 1, 2, \dots, s \\
\hat{Z}_t(h) &= \bar{Z}_t + h\hat{T}_t + \hat{F}_{t+h-2s}, h = s + 1, \dots, s. \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.40}$$

e as atualizações dadas por

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{t+1} &= D\left(\bar{Z}_{t+1} - \bar{Z}_t\right) + (1-D)\hat{F}_{t+1-s}, \\
\bar{Z}_{t+1} &= A\left(\bar{Z}_{t+1} - \hat{F}_{t+1-s}\right) + (1-A)\left(\bar{Z}_t + \hat{T}_t\right), \\
\hat{T}_{t+1} &= C\left(\bar{Z}_{t+1} - \bar{Z}_t\right) + (1-C)\hat{T}_t.
\end{aligned}$$

### 3.13 Modelos de Box-Jenkins

A metodologia proposta por George Box e Gwilyn Jenkins, mais conhecido por modelos de Box e Jenkins, permite efetuar previsões da série em estudo tomando como base apenas seus valores passados e presentes. Tal procedimento é feito através da correlação temporal existente entre os valores da série, ou seja, como uma série temporal tem os dados coletados sequencialmente ao longo do tempo, espera-se que ela apresente correlação seriada no tempo.

A previsão realizada pelo método de Box & Jenkins é dada por um conjunto de processos estocásticos denominado auto-regressivos integrados de médias móveis (ARIMA), ou seja, são modelos matemáticos que visam capturar o comportamento da autocorrelação entre os valores da série, e tendo em vista esse comportamento realizar previsões futuras. Vale salientar que, se essa estrutura for bem modelada, fornecerá boas previsões.

Segundo Fava (2000), os modelos ARIMA resultam da combinação de três componentes denominados “filtros”: o componente auto-regressivo (AR), o filtro de integração (I) e a componente de médias móveis (MA). Uma série pode ser modelada pelos três filtros ou apenas um subconjunto deles, resultando em vários modelos.

No decorrer desta seção serão apresentados alguns operadores, os quais serão listados abaixo para uma melhor compreensão:

- (i) Operador translação para o passado ( $B$ )

$$BZ_t = Z_{t-1}, B^m Z_t = Z_{t-m};$$

(ii) Operador translação para o futuro ( $F$ )

$$FZ_t = Z_{t+1}, F^m Z_t = Z_{t+m};$$

(iii) Operador diferença ( $\Delta$ )

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} = Z_t - BZ_t = (1 - B)Z_t,$$

logo

$$\Delta = 1 - B;$$

(iv) Operador soma ( $S$ )

$$SZ_t = \sum_{j=0}^{\infty} Z_{t-j} = Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + \dots = (1 + B + B^2 + \dots)Z_t,$$

logo

$$SZ_t = (1 - B)^{-1} Z_t = \Delta^{-1} Z_t,$$

então

$$S = \Delta^{-1}.$$

### 3.13.1 Modelos lineares estacionários

Como modelo estacionário define-se aqueles que assumem que o processo está em “equilíbrio”. Se as médias e a variância de um processo se mantêm constantes e a função de autocovariância depende apenas da defasagem nos instantes de tempo, então esse processo é denominado fracamente estacionário. Um processo é fortemente estacionário se todos os momentos conjuntos são invariantes as translações no tempo.

#### 3.13.1.1 Processo linear geral

Neste modelo a série será gerada através de um filtro linear, onde a entrada é dada pelo ruído branco, sendo expresso por

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu + \psi(B)a_t, \quad (3.41)$$

onde

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots, \quad (3.42)$$

denominado de *função de transferência* do filtro e  $\mu$  o nível da série.

Se tomarmos  $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$ , então

$$\tilde{Z}_t = \psi(B)a_t. \quad (3.43)$$

Temos também que

$$E(Z_t) = E(\mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots) = \mu + E(a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots)$$

$$E(Z_t) = \mu + E\left(a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\right),$$

se  $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$  convergir. Como  $E(a_t) = 0$ , temos também que  $E(Z_t) = \mu$ .

A função de autocovariância ( $\gamma_j$ ) de  $Z_t$  é dada por

$$\gamma_j = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j}. \quad (3.44)$$

No caso particular em que  $\psi_0 = 1$ , temos a variância de  $Z_t$ .

Há outra maneira de escrevermos (3.43), através de uma soma ponderada de valores passados mais um ruído branco, ou seja,

$$\tilde{Z}_t = \pi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{Z}_{t-j} + a_t. \quad (3.45)$$

Tomando  $B^m \tilde{Z}_t = \tilde{Z}_{t-m}$ , então

$$a_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j\right) \tilde{Z}_t$$

ou ainda

$$a_t = \pi(B) \tilde{Z}_t, \quad (3.46)$$

onde

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots \quad (3.47)$$

De  $\tilde{Z}_t = \psi(B)a_t$  e  $a_t = \pi(B)\tilde{Z}_t$ , tem-se que

$$\pi(B)\psi(B)a_t = a_t,$$

com

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B). \quad (3.48)$$

### 3.13.1.2 Modelos auto-regressivos (AR)

Em um modelo auto-regressivo, a série de dados históricos  $Z_t$  ( $t = 1, 2, \dots, N$ ) é descrita por seus valores passados regredidos e pelo ruído aleatório  $a_t$ .

Podemos denotar um modelo AR( $p$ ) como sendo:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t. \quad (3.49)$$

Note que os pesos de  $\pi_j$  foram renomeados para  $\phi_j$ . O operador auto-regressivo é dado por

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p, \quad (3.50)$$

logo, o ruído branco é dado por

$$a_t = \phi(B) \tilde{Z}_t. \quad (3.51)$$

Note que o modelo AR( $p$ ) possui certa semelhança com um modelo de regressão múltipla, onde os valores passados da série fazem o papel das variáveis independentes.

### 3.13.1.3 Modelos de médias móveis (MA)

Um modelo de médias móveis é resultante da combinação do período atual da série com os períodos ocorridos anteriormente mais o ruído branco. Logo, os valores previstos dependem apenas dos erros observados em cada período passado.

Podemos representar a estrutura de um modelo de médias móveis de ordem  $q$ , ou simplesmente MA( $q$ ), por

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \quad (3.52)$$

Como  $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$ , então temos

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \theta(B) a_t, \quad (3.53)$$

sendo o operador de médias móveis de ordem  $q$  dado por

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q. \quad (3.54)$$

No modelo de médias móveis a função de autocovariância é obtida por

$$\begin{aligned} \gamma_j &= E\left[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}\right] = E\left[\left(a_t - \sum_{k=1}^q \theta_k a_{t-k}\right)\left(a_{t-j} - \sum_{l=1}^q \theta_l a_{t-j-l}\right)\right] \\ \gamma_j &= E(a_t a_{t-j}) - \sum_{k=1}^q \theta_k E(a_{t-j} a_{t-k}) - \sum_{l=1}^q \theta_l E(a_t a_{t-j-l}) + \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \theta_k \theta_l E(a_{t-k} a_{t-j-l}). \end{aligned}$$

Vale salientar que

$$\gamma_a(j) = E(a_t a_{t-j}) = \begin{cases} \sigma_a^2, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases},$$



logo

$$\gamma_0 = \text{Var}(Z_t) = \sigma_Z^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2. \quad (3.55)$$

Então escrevendo a função de autocovariância (facv) em função de  $\gamma_a(j)$ , tem-se

$$\gamma_j = \gamma_a(j) - \sum_{k=1}^q \theta_k \gamma_a(k-j) - \sum_{l=1}^q \theta_l \gamma_a(j+l) + \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \theta_k \theta_l \gamma_a(j+l-k),$$

o que nos leva a

$$\gamma_j = \begin{cases} \left(-\theta_j \sum_{l=1}^{q-j} \theta_l \theta_{j+l}\right) \sigma_a^2, & j=0, \\ \left(-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \theta_2 \theta_{j+2} + \dots + \theta_q \theta_{q-j}\right) \sigma_a^2, & j=1, \dots, q, \\ 0, & j > q. \end{cases} \quad (3.56)$$

Portanto, a partir de (3.55) e (3.56) obtém-se a função de autocorrelação, dada por

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \theta_2 \theta_{j+2} + \dots + \theta_q \theta_{q-j}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2}, & j=1, 2, \dots, q, \\ 0, & j > q. \end{cases} \quad (3.57)$$

### 3.13.1.4 Modelos auto-regressivos de médias móveis (ARMA)

Podem ocorrer o caso em que se faz necessário utilizar uma grande quantidade de parâmetros em um modelo AR( $p$ ) ou em um modelo MA( $q$ ). Nesse tipo de situação, é mais vantajoso combinar as componentes dos dois modelos, gerando, assim, um modelo denominado ARMA( $p, q$ ). Com esta combinação pode-se obter uma representação adequada do problema, com um número menor de parâmetros. Esta junção forma uma classe de modelos úteis e parcimoniosos para a representação dos dados de séries temporais.

O modelo ARMA( $p, q$ ) exigirá um número menor de termos e pode ser expresso por

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \quad (3.58)$$

Os operadores auto-regressivos podem ser escritos da seguinte forma

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = \theta(B) a_t. \quad (3.59)$$

De (3.58) obtém a seguinte relação

$$\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j} = \left( \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \right) \tilde{Z}_{t-j}.$$

Aplicando a esperança em ambos os membros, tem-se

$$\gamma_j = E\left(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}\right) = E\left[\left(\phi_1 \tilde{Z}_1 + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}\right) \tilde{Z}_{t-j}\right],$$

logo

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p} + \gamma_{za}(j) - \theta_1 \gamma_{za}(j-1) - \dots - \theta_q \gamma_{za}(j-q), \quad (3.60)$$

sendo  $\gamma_{za}(j)$  a covariância entre  $Z_t$  e  $a_t$  definida por

$$\gamma_{za}(j) = E\left(a_t \tilde{Z}_{t-j}\right).$$

$\tilde{Z}_{t-j}$  depende apenas de  $a_t$  até o tempo  $t-j$ , logo

$$\gamma_{za}(j) = \begin{cases} = 0, & j > 0 \\ \neq 0, & j \leq 0 \end{cases}$$

e, portanto, (3.60) é escrito como sendo

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p}, \quad j > q. \quad (3.61)$$

A função de autocorrelação (fac) é dada por

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p}, \quad j > q. \quad (3.62)$$

De um modo geral, para um processo ARMA( $p, q$ ) estacionário, a função de autocorrelação tem um decaimento exponencial ou oscilatório após a defasagem  $q$  enquanto que a facp tem o mesmo comportamento após a defasagem  $p$  (BOX e JENKINS, 1970).

### 3.13.1.5 Função de autocorrelação parcial (facp)

Box, Jenkins e Reinsel (1994) propuseram a utilização de um instrumento cuja finalidade é facilitar o processo de identificação do modelo aos dados observados, ou seja, se os dados se adequam a um modelo MA( $q$ ), a um modelo AR( $p$ ) ou a um modelo ARIMA( $p, q$ ), tal instrumento é conhecido como *função de autocorrelação parcial (facp)*.

Denotemos o  $j$ -ésimo coeficiente de um modelo AR( $k$ ) como sendo  $\phi_{kj}$ , sendo o último coeficiente do modelo dado por  $\phi_{kk}$ . Sabe-se que

$$\rho_j = \phi_{k1} \rho_{j-1} + \phi_{k2} \rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk} \rho_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Então, pode-se obter as equações conhecidas por equações de Yule-Walker, dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{k-1} \\ p_1 & 1 & p_2 & \cdots & p_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Resolvendo as equações para  $k = 1, 2, 3, \dots$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \theta_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_2^2 - \rho_1^2\rho_3 + \rho_3}{1 + 2\rho_1^2\rho_2 - 2\rho_1^2 - \rho_2^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

e, de modo geral

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|},$$

sendo,  $P_k$  a matriz composta pelas correlações e  $P_k^*$  a matriz  $P_k$  com a última coluna composta pelo vetor de autocorrelações. Portanto,  $\phi_{kk}$  é a função de autocorrelação parcial (facp).

### 3.14 Modelos não estacionários

Quando uma série temporal apresenta média e variância dependentes do tempo, dizemos que ela é não-estacionária. A não-estacionariedade de uma série implica que (1) há inclinação nos dados e eles não permanecem ao redor de uma linha horizontal ao longo do tempo e/ou (2) a variação dos dados não permanece essencialmente constante no tempo, isto é, as flutuações aumentam ou diminuem com o passar do tempo, indicando que a variância está se alterando.

Para detectar a não-estacionariedade de uma série, o comportamento temporal pode ser analisado graficamente, buscando padrões (1) e (2) ou, então, aplicando os testes estatísticos de raiz unitária.

### 3.14.1 Modelos ARIMA

George Box e Gwilym Jenkins no início dos anos 70 popularizaram os modelos ARIMA, e seus nomes têm sido usados como sinônimo destes modelos. Box e Jenkins colocaram de forma compreensiva a informação necessária para entender e utilizar os modelos ARIMA para séries temporais univariadas.

Para que determinados procedimentos sejam aplicados em uma série temporal, a mesma tem que apresentar condições de estacionariedade. Caso este critério não seja obedecido, então se faz necessário a aplicação de meios que transformem a série em uma série estacionária. Segundo Morretin & Tolo (1987), a transformação mais comum consiste em tomar diferenças sucessivas da série original até obter uma série estacionária. Segundo os autores, em situações normais uma ou duas diferenças é suficiente para tornar a série estacionária. Demonina-se como ordem de integração o número  $d$  de diferenças que torne a série estacionária. Portanto, com a inclusão do termo  $d$  (ordem de integração) nos permite que sejam utilizados os modelos ARIMA( $p,d,q$ ).

Seja  $W_t = \Delta^d Z_t$  estacionária, então pode-se escrever  $W_t$  através de um modelo ARMA( $p,q$ ), ou seja,

$$\phi(B)W_t = \theta(B)a_t, \quad (3.65)$$

logo substituindo  $W_t = \Delta^d Z_t$  em (3.65) obtém-se o modelo

$$\phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)a_t, \quad (3.66)$$

denominado modelo auto-regressivo, integrado, de médias móveis, ou simplesmente ARIMA( $p,d,q$ ).

Para se prever uma série temporal através dos modelos ARIMA, torna-se necessário identificar a ordem dos parâmetros  $p$ ,  $d$  e  $q$ . O primeiro parâmetro a ser identificado é o grau de diferenciação  $d$ , necessário à estabilização dos dados. Isto é feito através de um exame do correlograma, ou seja, do diagrama da função de autocorrelação (fac), no qual são apresentados os valores das autocorrelações em relação aos lags  $k$ . A ordem auto-regressiva  $p$

é determinada pela verificação da função de autocorrelação parcial (fapc) da série estudada. Se a série for unicamente auto-regressiva ARIMA  $(p,d,0)$ , sua função de autocorrelação parcial sofrerá uma queda repentina após o *lag*  $k$ . Se não, efetua-se uma análise dos estimadores  $\phi_{kk}$  para verificar até que ordem de defasagem do correlograma desta função ele é estatisticamente significativa. Essa será sua ordem autorregressiva (RIBEIRO e PAULA, 2000)

Após a identificação do modelo, deve-se realizar a estimação dos parâmetros. Judge (1988) coloca que os parâmetros do processo AR são estimados através de métodos de regressão. Caso o processo MA esteja envolvido, a estimação dos parâmetros deste modelo é obtida pela aplicação de algum algoritmo de otimização não-linear.

### 3.15 Etapas da metodologia Box-Jenkins

Segundo Morretin & Toloi (1987), a construção dos modelos Box-Jenkins é baseada em um ciclo iterativo, no qual a escolha do modelo é feita com base nos próprios dados. Segundo Box & Jenkins (1976), são três as etapas para construção do modelo:

1. *Identificação*: consiste em descobrir qual dentre as várias versões dos modelos de Box-Jenkins, sejam eles sazonais ou não, descreve o comportamento da série. A identificação do modelo a ser estimado ocorre pelo comportamento das funções de autocorrelações (fac) e das funções de autocorrelações parciais (fapc).

2. *Estimação*: consiste em estimar os parâmetros  $\phi$  e  $\Phi$  da componente autorregressiva, os parâmetros  $\theta$  e  $\Theta$  da componente de médias móveis e a variância de  $a_t$ .

3. *Verificação*: consiste em avaliar se o modelo estimado é adequado para descrever o comportamento dos dados.

### 3.16 Identificação de modelos

Uma etapa crucial e uma das mais delicadas na construção de modelos ARIMA $(p,d,q)$  se refere na identificação do modelo mais adequado ao ajuste dos dados, pois na maioria das vezes não se escolhe apenas um modelo, e sim mais de um modelo que se adéque aos dados.

Para contornar esse tipo de problema foram propostos na literatura vários critérios de seleção de modelos, critérios esses que mostram quais modelos descrevem melhor a dinâmica de uma série temporal.

Uma forma de “discriminar” entre estes modelos competidores é utilizar os chamados critérios de informação que levam em conta não apenas a qualidade do ajuste, mas também penalizam a inclusão de parâmetros extras. Assim, um modelo com mais parâmetros pode ter um ajuste melhor, mas não necessariamente será preferível em termos de critério de informação. A regra básica consiste em selecionar o modelo cujo critério de informação calculado seja mínimo (EHLERS, 2007).

### 3.16.1 Critérios de Seleção de Modelos

Desde o início dos anos 70 procedimentos de identificação baseados em uma função penalizadora têm sido propostos. A idéia é escolher as ordens  $p$  e  $q$  de um modelo ARMA que minimizem

$$P(p, q) = \log \sigma_{p,q}^2 + (p + q) \frac{C(N)}{N}, \quad (3.67)$$

onde  $\sigma_{p,q}^2$  é uma estimativa da variância do ruído branco obtida pelo ajuste de um modelo ARMA( $p, q$ ) aos dados e  $C(N)$  é uma função do tamanho da série ( $N$ ). A forma dessa função penalizadora é baseada no fato de que, como a variância estimada  $\sigma_{p,q}^2$  diminui à medida que o número de parâmetros aumenta, ela sozinha não pode ser um bom critério para escolha da ordem que minimiza a função. Dessa forma foi necessário acrescentar um termo penalizador  $(p + q).C(N)/N$  para obter a equação (3.67) (CHOI, 1992).

A seguir serão apresentados alguns critérios de identificação que minimizam funções penalizadoras particulares.

### 3.16.2 Critério de informação de Akaike (AIC)

O critério de informação de Akaike pode ser escrito da seguinte forma

$$AIC(k, l) = \ln \sigma_{k,l}^2 + \frac{2(k + l)}{N}, \quad (3.68)$$

sendo  $0 \leq k \leq K$  e  $0 \leq l \leq L$ , onde  $K$  e  $L$  em geral são funções de  $N$ .

Segundo Morettin & Toloi (2005), dependendo dos valores de  $K$  e  $L$ , muitos modelos precisam ser ajustados a fim de obter o menor AIC.

Se o modelo for  $AR(p)$ , então o critério AIC pode ser escrito como

$$AIC(k) = N \ln \hat{\sigma}_k^2 + 2k, \quad k \leq K. \quad (3.69)$$

Em casos onde o tamanho da amostra é grande e a dimensão do modelo candidato é relativamente pequena, o AIC é um estimador aproximadamente não-viesado. Em outras situações, o AIC pode apresentar grande viés negativo. Assim, dado não ser o AIC adequado para pequenas amostras e com o objetivo de melhorar o seu comportamento, no sentido de reduzir a probabilidade de seleção de uma ordem maior do que a verdadeira, foram propostas algumas correções para melhorar o comportamento do AIC em amostras finitas (PEREIRA, et al. 2006).

### 3.16.3 Critério de informação de Akaike corrigido (AICc)

Outro critério proposto, sendo este uma modificação corrigida do critério de informação de Akaike, o critério de informação de Akaike corrigido foi proposto por Hurvich e Tsai (1989), sendo expresso por

$$AICc = AIC(k) + \frac{2(k+1)(k+2)}{N-k-2}, \quad k \leq K. \quad (3.70)$$

Mills e Prasad (1992) utilizaram simulações de Monte Carlo no intuito de avaliar o desempenho de alguns critérios. Os autores confirmaram que o AICc funciona bem em pequenas amostras, no entanto, em amostras maiores o critério de informação bayesiana (BIC), apresenta melhor desempenho.

Vale salientar que os critérios AIC e AICc supõem que a classe de modelos candidatos inclui o verdadeiro modelo.

### 3.16.4 Critério de informação Bayesiana (BIC)

Além dos critérios acima citados existem outros critérios que são basicamente modificações do AIC. Desenvolvido por Schwarz (1978) e Akaike (1978), o critério de informação bayesiano, BIC, é dado por

$$\text{BIC}(k, l) = \ln \hat{\sigma}_{k,l}^2 + (k + l) \frac{\ln N}{N}. \quad (3.71)$$

Segundo Ehlers (2007), estas medidas não têm significado quando olhadas individualmente, ou seja, considerando apenas um único modelo. Logo, tanto o AIC quanto o BIC podem assumir qualquer valor, inclusive valor negativo, tendo em vista que são dependentes da forma da função de verossimilhança.

### 3.16.5 Análise dos resíduos

Caso o modelo apresente um ajuste satisfatório, espera-se que os resíduos se distribuam aleatoriamente em torno de zero com variância aproximadamente constante e sejam não correlacionados. Se a variância dos resíduos for crescente, uma transformação logarítmica nos dados pode ser apropriada. O fenômeno de “não constância” na variância é denominado de volatilidade na literatura de séries temporais e pode ser tratado através de transformações nos dados (EHLERS, 2007).

É particularmente importante que os resíduos de um modelo estimado sejam serialmente (i.e. ao longo do tempo) não correlacionados. Evidência de correlação serial nos resíduos é uma indicação de que uma ou mais características da série não foi adequadamente descrita pelo modelo (EHLERS, 2007).

Conseqüentemente, duas maneiras de se verificar a adequação do modelo consistem em representar graficamente os resíduos e o seu correlograma. O gráfico temporal poderá revelar a presença de dados discrepantes, autocorrelação ou padrões cíclicos enquanto que o correlograma permite uma análise mais detalhada da estrutura de autocorrelação indicando possíveis termos ausentes no modelo (EHLERS, 2007).

Portanto, se um modelo ARIMA estiver bem ajustado os resíduos formam uma sequência independente e identicamente distribuída com distribuição normal. Assim, a adequação do modelo pode ser verificada aplicando testes de normalidade aos resíduos e de aleatoriedade (Ljung-Box) aos quadrados dos resíduos.



### 3.16.5.1 Teste de Ljung-Box

Seja a estatística  $Q$ , definida por:

$$Q = n \sum_{j=1}^h \hat{\rho}^2(j),$$

onde,  $\rho$  representa a autocorrelação entre as observações  $y_t$  e  $y_{t+j}$ . Considere uma sequência de observações com variância finita  $Z_1, \dots, Z_n$ , independente e identicamente distribuída (iid), temos que  $Q$  será distribuída aproximadamente como uma soma de quadrados de uma sequência de variáveis aleatórias que seguem uma distribuição  $N(0;1)$ . Logo,  $\sqrt{n}\hat{\rho}(j)$ ,  $j = 1, \dots, h$ , apresentará uma distribuição qui-quadrado com  $h$  graus de liberdade.

Grandes valores de  $Q$  sugerem que a hipótese de independência deve ser rejeitada, ou seja, os dados apresentam alguma autocorrelação. Portanto, rejeitamos a hipótese de independentes e identicamente distribuída ao nível de significância  $\alpha$ , se  $Q > \chi_{1-\alpha, h}^2$ , onde  $\chi_{1-\alpha, h}^2$  é  $1-\alpha$  quantil de uma qui-quadrado com  $h$  graus de liberdade.

### 3.16.6 Critérios de Previsão

Para decidir sobre qual modelo de previsão será utilizado para a representação da série temporal em estudo, faz-se necessário utilizar algumas medidas de erro, cuja finalidade é encontrar o modelo que melhor atenda aos resultados esperados do estudo.

Na literatura existem diversas medidas de erro, dentre as quais podemos citar: erro total (ET), erro percentual médio (EPM), erro quadrático médio (EQM), erro absoluto médio (EAM), raiz do erro médio quadrático (REQM), erro percentual médio absoluto (EPMA), entre outros. Neste trabalho serão abordados apenas alguns dos erros citados.

Pode-se citar como o objetivo básico da análise de séries temporais a previsão de valores futuros. Logo, tendo uma série  $N$  observações, é comum utilizar os  $n$  primeiros valores ( $n < N$ ) para a elaboração de um modelo que seja representativo da série e utilizar as outras  $N - n$  observações mais recentes para verificar a qualidade das  $N - n$  previsões obtidas a partir do modelo estimado.

Portanto, os erros de previsão podem ser representados por

$$e_j = y_{n+j} - \hat{y}_{n+j}, \quad (3.72)$$

onde,  $\hat{y}_{n+j}$  é a previsão da observação  $y_{n+j}$ .

A seguir, apresentamos as medidas que serão abordadas neste trabalho:

**i) Erro percentual médio (EPM)**

$$MPE = \left( \frac{\sum_{j=t+1}^{t+h} y_j - \sum_{j=t+1}^{t+h} \hat{y}_j}{\sum_{j=t+1}^{t+h} y_j} \right) \cdot 100, \quad (3.73)$$

**ii) Erro absoluto médio (EAM)**

$$MAE = \frac{1}{h} \sum_{j=t+1}^{t+h} |y_j - \hat{y}_j|, \quad (3.74)$$

**iii) Raiz do erro médio quadrático (REQM)**

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^h (y_j - \hat{y}_j)^2}{h}}, \quad (3.75)$$

**iv) Erro percentual médio absoluto (EPMA)**

$$MAPE = \frac{\sum_{j=1}^h \left| \frac{y_j - \hat{y}_j}{y_j} \right|}{h} \cdot 100. \quad (3.76)$$

Para decidir qual modelo possui maior poder de previsão, adota-se como critério aquele que apresentar menor valor para os erros descritos acima, ou pelo menos para a maioria deles.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para modelar a série temporal sobre Tratamento de pacientes com acidente vascular cerebral iremos considerar o modelo de suavizamento de Holt-Winters e os modelos de Box-Jenkins.

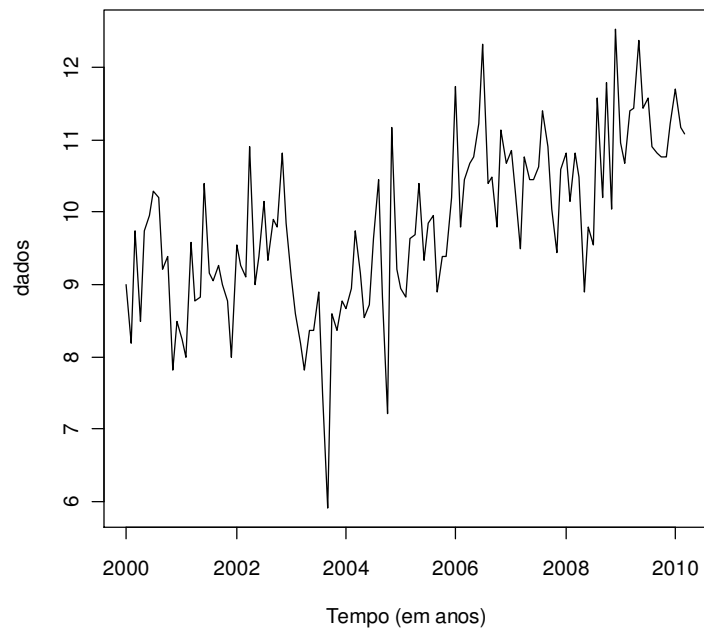
Inicialmente, vale salientar que, ao verificar a análise dos resíduos para o modelo de Box-Jenkins, o teste de Shapiro-Wilks indicou que os resíduos não apresentavam distribuição normal. Para o modelo que melhor se ajustou aos dados, o teste de normalidade para os resíduos apresentou p-valor = 0,001683.

Uma análise exploratória nos resíduos verificou que tal problema estava associado à presença de pontos aberrantes nos resíduos. Para tentar corrigir este fato foi proposta uma transformação de Box-Cox nos dados, obtendo-se valor  $\lambda = 0,5$ , sugerindo considerar a raiz quadrada da série de pacientes com acidente vascular cerebral, a qual será denominada de série AVC.

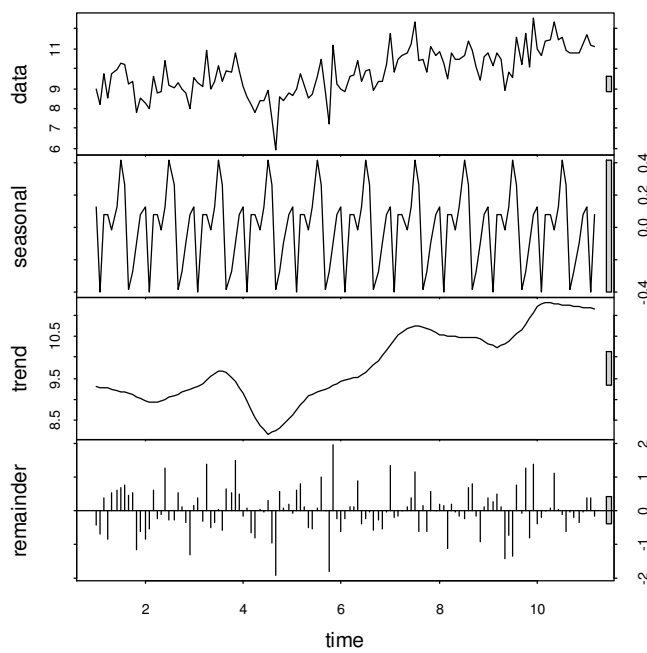
Nas próximas seções, apresentaremos em detalhes os ajustes para os modelos de Holt-Winters e de Box-Jenkins para a série transformada.

### 4.1 Ajuste do modelo de Holt-Winters

A Figura 3 mostra a série AVC. Observamos que a série apresenta uma tendência ascendente, sinalizando uma possível indicação de não estacionariedade. A Figura 4 apresenta a decomposição da série AVC em termos de sazonalidade, tendência e resíduos.



**Figura 3:** Série “Tratamento em acidente vascular cerebral (AVC)”.



**Figura 4:** Gráfico decomposto em: série AVC, componente sazonal, tendência, resíduos.

Para o modelo de Holt-Winters, foi ajustado o modelo aditivo e o modelo multiplicativo, e como estimativas dos parâmetros dos modelos foram encontrados os seguintes valores:

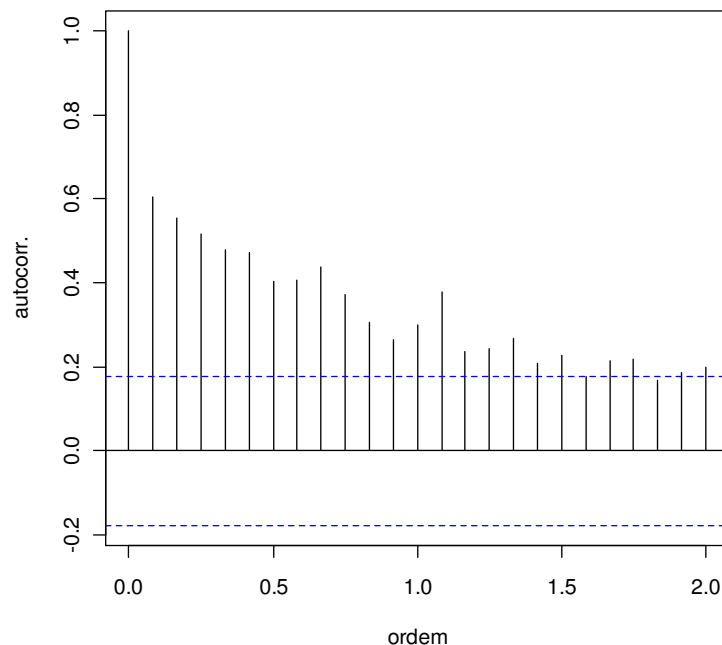
**Tabela 1:** Estimativa dos Parâmetros do modelo de Holt-Winters.

| Modelos        | Parâmetros |         |         |
|----------------|------------|---------|---------|
|                | Alfa       | Beta    | Gama    |
| Aditivo        | 0,21118    | 0,01287 | 0,32351 |
| Multiplicativo | 0,19983    | 0,01154 | 0,31922 |

Na Tabela 1 os valores das estimativas dos parâmetros nos modelos aditivo e multiplicativo, apresentam valores muito próximos, o que indica que o modelo aditivo deve ser o mais adequado. Além disso, como o valor de Gama foi baixo, há evidências de fraca sazonalidade na série.

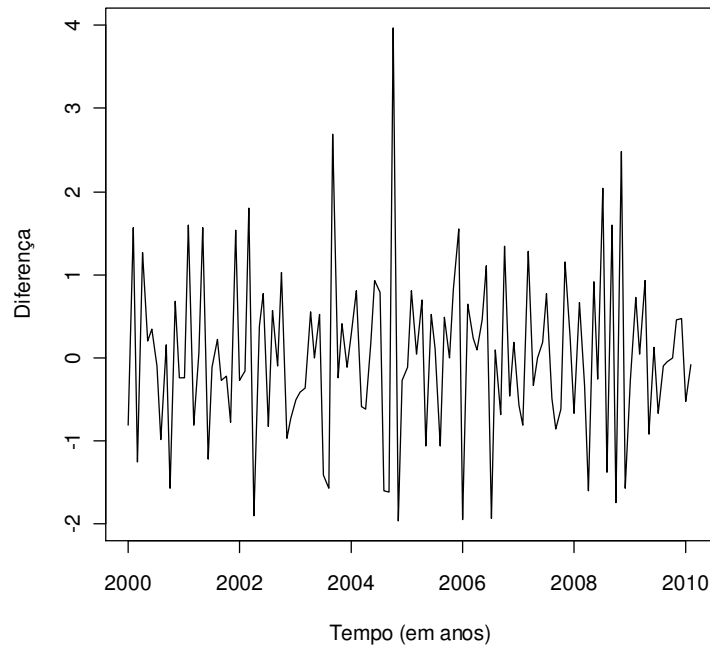
#### 4.2 Ajuste do modelo de Box-Jenkins

Como já abordado anteriormente, há suspeitas de que a série transformada não seja estacionária. Isto pode ser comprovado através do gráfico da autocorrelação, apresentado na Figura 5. Note que há um decaimento lento em direção ao valor zero, indicando uma não estacionariedade na série.



**Figura 5:** Gráfico de autocorrelação parcial da série AVC.

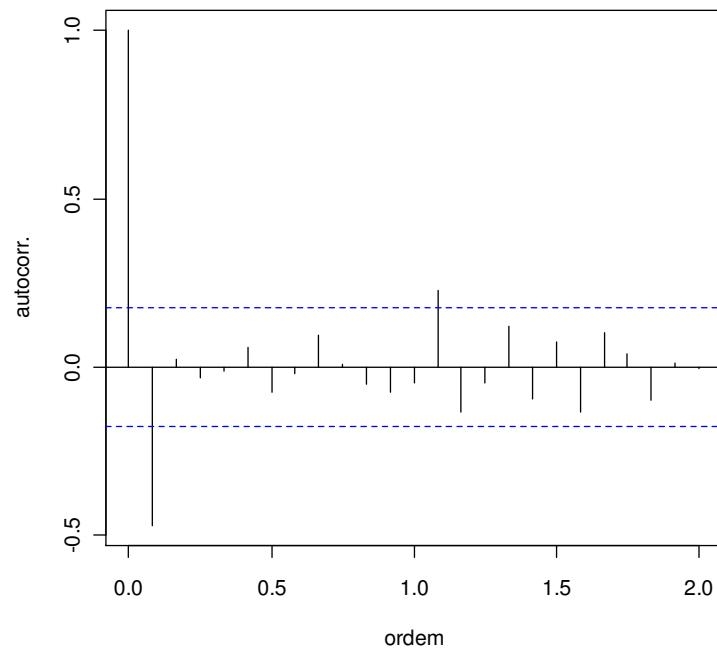
A Figura 6 representa a série diferenciada. Após aplicarmos uma diferença simples foi possível eliminar a tendência da mesma. Tal fato pode ser corroborado pelo teste de ascensão de Dickey-Fuller.



**Figura 6:** Gráfico da série AVC aplicada uma diferença simples.

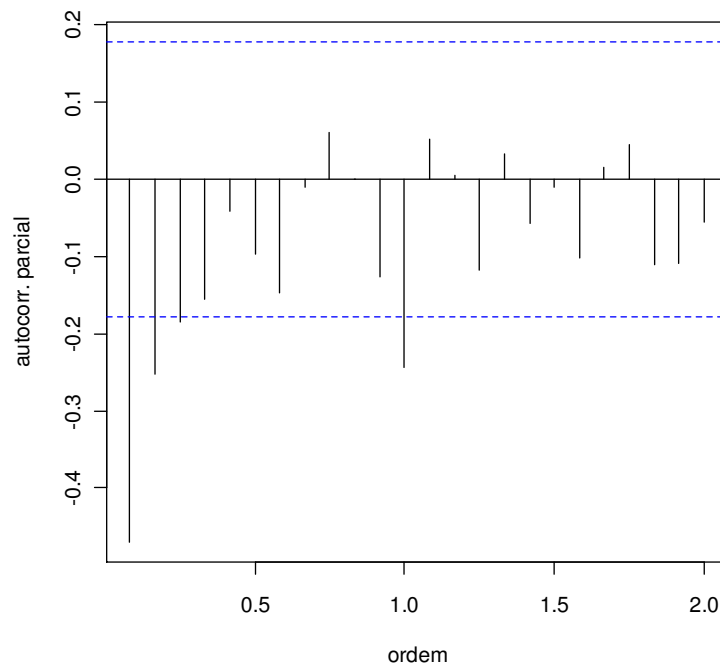
O p-valor obtido para o teste de Dickey-Fuller foi de 0,01. Logo, adotando um nível de significância  $\alpha = 0,05$ , concluímos que há evidências para rejeitar a hipótese nula, ou seja, a série diferenciada apresenta um comportamento estacionário.

A Figura 7 apresenta o gráfico de autocorrelação para a série diferenciada. Pode-se observar que apenas um *lag* 1 ultrapassou significativamente os limites delimitados no gráfico, o que indica uma ordem MA(1). Note também que os lags 12 e 24, que indicam um comportamento sazonal, apresentaram fraca autocorrelação. Concluindo que a componente sazonal não está presente na série.



**Figura 7:** Gráfico de autocorrelação da série AVC após aplicar uma diferença simples.

A Figura 8 apresenta o gráfico de autocorrelação parcial para a série diferenciada. Pode-se observar que os *lags* 1, 2 e 3 ultrapassaram os limites delimitados no gráfico. Dessa forma, podemos atribuir os valores 1, 2 ou 3 para a ordem auto-regressiva do modelo.



**Figura 8:** Gráfico de autocorrelação parcial da série AVC após aplicar uma diferença simples.

A partir das sugestões apresentadas acima, foram ajustados 4 modelos em função das ordens  $p$  e  $q$ . Vale ressaltar que, além dos modelos apresentados na Tabela 2, foram ajustados outros modelos incluindo a componente sazonal (SARIMA) apenas para nível exploratório. No entanto, estes apresentaram desempenho inferior aos modelos sem sazonalidade, bem como a rejeição da hipótese de normalidade para os resíduos.

A escolha do modelo que melhor se ajusta aos dados foi baseada nos critérios AIC, AIC<sub>c</sub> e BIC. A Tabela 2 apresenta os modelos com menores valores de AIC, AIC<sub>c</sub> e BIC.

**Tabela 2:** Modelos com menores critérios de Informação.

| <b>Modelos</b> | <b>Critérios de Informação</b> |                           |              |
|----------------|--------------------------------|---------------------------|--------------|
| ARIMA(0,1,1)   | AIC = 307,60                   | AIC <sub>c</sub> = 307,70 | BIC = 313,20 |
| ARIMA(1,1,1)   | AIC = 309,31                   | AIC <sub>c</sub> = 309,51 | BIC = 317,72 |
| ARIMA(2,1,1)   | AIC = 310,55                   | AIC <sub>c</sub> = 310,90 | BIC = 321,77 |
| ARIMA(3,1,1)   | AIC = 312,39                   | AIC <sub>c</sub> = 312,90 | BIC = 326,41 |

Para os modelos escolhidos foi realizado o teste de Shapiro-Wilks, obtendo-se p-valores maiores que o nível de significância de 5%. De acordo com os resultados apresentados na Tabela 3, podemos afirmar que existem evidências estatísticas para aceitar a hipótese de que os resíduos seguem distribuição normal.

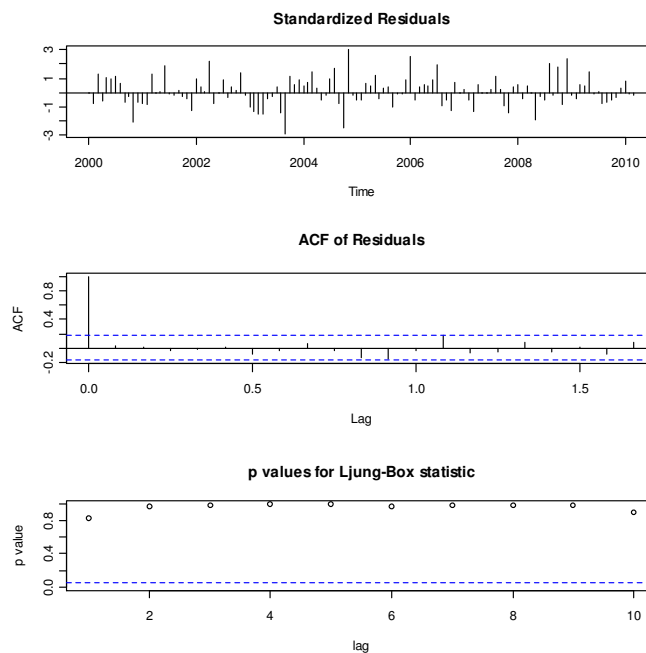
**Tabela 3:** P-valores para o teste de normalidade dos resíduos.

| <b>Modelo</b> | <b>p-valor do teste de normalidade dos resíduos</b> |
|---------------|---|
| ARIMA(0,1,1)  | 0,4305  |
| ARIMA(1,1,1)  | 0,3697  |
| ARIMA(2,1,1)  | 0,2521  |
| ARIMA(3,1,1)  | 0,2277  |

Análise residual do modelo ARIMA(0,1,1) é apresentada na Figura 9. Observa-se que a grande maioria dos resíduos padronizados encontra-se dentro do intervalo de -2 a 2, indicando que o modelo apresentou bom ajuste aos dados. O segundo gráfico apresenta as autocorrelações dos resíduos e também os limites assintóticos para uma significância de 95%. Note que as autocorrelações amostrais estão dentro dos limites assintóticos. Desta forma, pode-se afirmar que os resíduos não estão correlacionados. Tal fato é corroborado ao analisarmos os p-valores para o teste de Ljung-Box.



A Figura 9 faz referência ao modelo ARIMA(0,1,1). O mesmo gráfico, foi analisado para os outros modelos e todos apresentaram as mesmas características.



**Figura 9:** Gráfico decomposto em resíduos padronizados, autocorrelação dos resíduos e teste de Ljung-Box.

### 4.3 Comparação dos modelos

Para analisar o poder de previsão dos modelos de Holt-Winters e dos modelos de Box-Jenkins, foram realizadas previsões para 3, 6 e 12 passos a frente. Em seguida, foram calculados os seguintes erros de previsão: erro percentual médio (EPM), erro absoluto médio (EAM), raiz do erro médio quadrático (REMQ) e o erro percentual médio absoluto (EPMA). As medidas de erro para os modelos podem ser observadas na Tabela 4. É possível observar que o modelo ARIMA(1,1,1) apresentou menores erros de previsão 3 passos a frente, ou seja, o modelo foi responsável pelas melhores previsões a curto prazo. Já para previsões 6 passos a frente, o modelo que apresentou melhores resultados foi o ARIMA(2,1,1). Por fim, o modelo que apresentou os menores erros para previsões mais longas foi o ARIMA(0,1,1). Além disso, note que os modelos de Holt-Winters não se destacam entre os que possuíram melhor poder de previsão.

**Tabela 4:** Medidas de erros para os modelos de Holt-Winters e Box-Jenkins.

| Previsões | Modelos                     | EPM           | EAM           | REMQ          | EPMA          |
|-----------|-----------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 3 passos  | Holt-Winters Aditivo        | 3,7224        | 0,4216        | 0,4851        | 3,6987        |
|           | Holt-Winters Multiplicativo | 3,6518        | 0,4136        | 0,4837        | 3,6297        |
|           | ARIMA(0,1,1)                | 2,3920        | 0,2709        | 0,3831        | 2,3370        |
|           | <b>ARIMA(1,1,1)</b>         | <b>2,1823</b> | <b>0,2471</b> | <b>0,3631</b> | <b>2,1282</b> |
|           | ARIMA(2,1,1)                | 2,1954        | 0,2486        | 0,3745        | 2,1384        |
|           | ARIMA(3,1,1)                | 2,4799        | 0,2809        | 0,3989        | 2,4224        |
| 6 passos  | Holt-Winters Aditivo        | -1,0409       | 0,3433        | 0,3655        | 3,0868        |
|           | Holt-Winters Multiplicativo | -1,0385       | 0,3501        | 0,3734        | 3,1482        |
|           | ARIMA(0,1,1)                | -0,6434       | 0,2514        | 0,3247        | 2,2638        |
|           | ARIMA(1,1,1)                | -0,6357       | 0,2483        | 0,3320        | 2,2349        |
|           | <b>ARIMA(2,1,1)</b>         | <b>0,1456</b> | <b>0,2308</b> | <b>0,2989</b> | <b>2,0593</b> |
|           | ARIMA(3,1,1)                | 0,6781        | 0,2463        | 0,3150        | 2,1884        |
| 12 passos | Holt-Winters Aditivo        | 0,6350        | 0,4791        | 0,6528        | 4,1713        |
|           | Holt-Winters Multiplicativo | 0,1814        | 0,5531        | 0,7298        | 4,8316        |
|           | <b>ARIMA(0,1,1)</b>         | 1,7888        | <b>0,3730</b> | <b>0,4931</b> | <b>3,2234</b> |
|           | ARIMA(1,1,1)                | 2,0968        | 0,3833        | 0,5075        | 3,3062        |
|           | ARIMA(2,1,1)                | 3,1864        | 0,4190        | 0,5647        | 3,5964        |
|           | ARIMA(3,1,1)                | 3,7058        | 0,4444        | 0,6003        | 3,8105        |

#### 4.4 Previsões Futuras

A Tabela 5 apresenta as previsões para a série AVC três passos à frente, segundo o modelo ARIMA(1,1,1). Para o modelo em questão, as previsões apresentaram valores semelhantes, no entanto os intervalos com 95% de confiança obtidos variaram de acordo com o mês.

**Tabela 5:** Previsões para três passos a frente.

| ARIMA(1,1,1) |       |             |             |
|--------------|-------|-------------|-------------|
| Mês          | Valor | Limite inf. | Limite Sup. |
| abr/10       | 125   | 91          | 164         |
| mai/10       | 125   | 90          | 166         |
| jun/10       | 125   | 89          | 168         |

A Tabela 6 apresenta as previsões para a série AVC seis passos à frente, segundo o modelo ARIMA(2,1,1). As observações realizadas para o modelo ARIMA(1,1,1) a respeito dos valores previstos, também são observadas para o modelo ARIMA(2,1,1).

**Tabela 6:** Previsões para seis passos a frente.

| <b>ARIMA(2,1,1)</b> |              |                    |                    |
|---------------------|--------------|--------------------|--------------------|
| <b>Mês</b>          | <b>Valor</b> | <b>Limite inf.</b> | <b>Limite Sup.</b> |
| abr/10              | 124          | 91                 | 163                |
| mai/10              | 124          | 89                 | 165                |
| jun/10              | 124          | 88                 | 167                |
| jul/10              | 124          | 87                 | 169                |
| ago/10              | 124          | 86                 | 170                |
| set/10              | 124          | 86                 | 170                |

Para a modelagem da série AVC, não foi possível capturar as informações para o mês de abril/2010, pois o Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde (DATASUS) não havia disponibilizado em sua base de dados. No entanto, após a conclusão do mesmo, foi disponibilizada tal informação, sendo o número de pacientes com AVC igual a 115. Observa-se que valor estimado pelo modelo ARIMA(2,1,1) esteve próximo do esperado, sendo o mesmo pertencente aos limites de confiança obtido.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo como objetivo principal deste estudo obter previsões para o número de pacientes atendidos nos hospitais do município de João Pessoa-PB acometidos por AVC, foram utilizados alguns modelos de séries temporais para série histórica que compreende o período de janeiro de 2000 a março de 2010. As abordagens utilizadas foram o alisamento exponencial de Holt–Winters e os métodos de Box–Jenkins. Apenas como critério de estudo foi verificado que modelos com componentes sazonais não se adequavam aos dados em estudo.

As previsões obtidas pelo algoritmo de Holt–Winters, tanto para o modelo aditivo como para o modelo multiplicativo, apresentaram baixa precisão, segundo os critérios utilizados. Com a adoção da metodologia de Box–Jenkins, obteve-se resultados mais satisfatórios que os encontrados pelo método anterior.

Os modelos que apresentaram maior poder de previsão foram: o ARIMA(1,1,1), para previsões de curto período, o ARIMA(2,1,1), para previsões de médios períodos e o ARIMA(0,1,1), para previsões de longos períodos. Este último não foi utilizado para realizar previsões. Vale salientar que os modelos ARIMA não apresentaram restrições quanto à análise residual.

Além disso, após a obtenção da informação do mês de Abril de 2010, verificou-se que o valor estimado para a quantidade de pacientes que sofreram AVC atendidos nos hospitais de João Pessoa, se aproximava do valor observado, sendo este pertencente aos limites de confiança estimados pelos modelos escolhidos.

## Referencial bibliográfico

- AKAIKE, H., *A new look at the Bayes procedure*. Biometrika, 65, 53–59, 1978.
- ANDERSON, T. W., *The Statistical Analysis of Time Series*. New York: John Wiley & Sons, 1971.
- BARBANCHO, A.G., *Fundamentos e Possibilidades da Econometria*. Rio de Janeiro: Forum Editora, p. 18 – 32, 1970.
- BOX, G.E.P. & JENKINS, G.M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco, California, 1970.
- BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M., *Time series analysis forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day, 1976. Edição revisada.
- BVS – Biblioteca Virtual em Saúde. <<http://bvsmms.saude.gov.br>>  
Acessado em 05 jun. 2010.
- COHEN, H., *Neurociência para Fisioterapeutas incluindo correlações clínicas*, 2ed. São Paulo: Manole, 2001.
- CHANG, Y.; PARK, J.Y., *A sieve bootstrap for the test of a unit root*. Journal of Time Series Analysis 24, 370-400, 2003.
- CHOI, B., *ARMA Model Identification*. New York: Springer, 1992.
- DICKEY, D.A.; FULLER, W.A., *Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root*. Econometrica, 1981.
- DICKEY, D.A.; FULLER, W.A., *Distribution of the estimator for autoregressive time series with a unit root*. Journal of the American Statistical Association, 1979.
- EHLERS, R.S., *Análise de séries temporais*, 2007.
- ENDERS, W., *Applied econometric time series*. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- FAVA, V. L., *Manual de econometria*. In: VASCONCELOS, M. A. S.; ALVES, D. São Paulo: Editora Atlas, 2000.
- GRANGER, C.W.J.; NEWBOLD, P., *Forecasting Economic Time Series*. New York: Academic Press, 1977.
- GUJARATI, D., *Econometria Básica*, Elsevier, 2006.
- HAMILTON, J. D., *Time series analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1994.

HURVICH, C.M.; TSAI, C.L., *Regression and time series model selection in small samples*. *Biometrika*, 76, 297–307, 1989.

JUDGE, G.G. et al., *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. 2th edition. New York : John Wiley & Sons Inc, 1988. p. 673 – 750, 1988.

LJUNG, G.M.; BOX, G.E.P., "On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models". *Biometrika* **65** : pp. 297–303, 1978.

MAKRIDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S.; HYNDMAN, R. J., *Forecasting methods and applications*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.

MARGARIDO, M.A.; JUNIOR, H.M., *Teste Para Mais de Uma Raíz Unitária: Uso do Software SAS na Elaboração de Uma Rotina Para o Teste Dickey-Pantula*. *Pesquisa & Debate*, v.17, n.1, p.149-170, 2006.

MILLS, J.A. & PRASAD, K., *A comparison of model selection criteria*. *Econometric Reviews*, 11, 205–233, 1992.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C., *Modelos para Previsão de Séries Temporais*. In: 13º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: [s.n.], 1981.

MORRETIN, P. A.; TOLOI, C. M. C., *Previsão de séries temporais*. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1987.

MORRETIN, P. A.; TOLOI, C. M. C., *Análise de séries temporais*. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

NELSON, C.R., *Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting*. San Francisco: Holden-Day, 1973.

O'SULLIVAN, S.B.; SCHMITZ, T.J., *Fisioterapia, Avaliação e Tratamento*, segunda edição, Editora Manole, SP, 1993.

PEREIRA, T.L.; SOUZA, T.C.E.; CASSIANO, K.M., *Comparação de Métodos de Previsão: Uma Aplicação ao IGP-DI*. In: 17º Simpósio nacional de Probabilidade e Estatística, 2006, Caxambu - MG. Anais do 17º SINAPE.

R Development Core Team, *A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing - Vienna, Austria, 2010.  
Disponível em < <http://www.R-project.org>>. Acesso em: 22 abr. 2010.

REFENES, A.N. et al., *Financial Modelling using Neural Networks*. London: [s.n.]. Department of Computer Sciences, University College London, p. 1 – 31, 1993.

RIBEIRO, L.C.; PAULA, A.V. *Previsão de população através dos modelos ARIMA de Box & Jenkins: um exercício para o Brasil*. In: ENCONTRO NACIONAL DE ESTUDOS POPULACIONAIS, 12, 2000, Caxambu. **Anais...** Campinas: ABEP, 2000.

Disponível em <[http://www.abep.nepo.unicamp.br/docs/anais/pdf/2000/todos/projt9\\_3.pdf](http://www.abep.nepo.unicamp.br/docs/anais/pdf/2000/todos/projt9_3.pdf)>  
Acesso em: 25 mar. 2010.

SMS – Secretaria Municipal de Saúde.

Disponível em <<http://www.joaopessoa.pb.gov.br/secretarias/saude>>. Acesso em : 02 mar. 2010.

SAID, S.; DICKEY, D., *Testing for unit root autoregressive-moving average models of unknown order*. *Biometrika* (71), 599-608, 1984.

SOUZA, R.C., *Modelos Estruturais para Previsão de Séries Temporais : Abordagens Clássica e Bayesiana*. In: 17º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, 1989.

SCHWARZ, G., *Estimating the dimension of a model*. *Annals of Statistics*, 6, 461–464, 1978.

TabWin – Tabulador de Informações de Saúde para ambiente Windows.

Disponível em <<http://www2.datasus.gov.br>>. Acesso em: 15 mar. 2010.

WERNER, L.; RIBEIRO, J.L.D., *Previsão de demanda: uma aplicação dos modelos boxjenkins na área de assistência técnica de computadores pessoais*, *Gestão & Produção*, 2003.

WHEELWRIGHT, S.C.; MAKRIDAKIS, S., *Forecasting Methods for Management*. 4th edition. New York : John Wiley & Sons Inc, 1985.