# 4. Proposta de um sistema especialista para classificação de imagens

"A única possibilidade de descobrir os limites do possível
é aventurar-se um pouco no terreno do impossível"
*Artur C. Clark (1917- )*

As regras cumprem papel fundamental na construção de um sistema especialista. É a partir delas que o conhecimento se codifica para a resolução de um problema e por elas um especialista exprime o seu conhecimento a respeito de um fenômeno. Elas podem ser expressas por uma construção do tipo *Se A ocorre e B ocorre então C ocorre.*

Supondo-se que se deseja classificar uma imagem $f$ em $m$ classes, onde uma imagem $f$ pode ser definida como um mapeamento de um retângulo $E \subseteq Z^2$ em um contradomínio $K$. Uma *imagem binária* $f$ mapeia $E$ em $K_1 = \{0, 1\}$ e como visto na seção 2.3, $K_1$ é uma cadeia limitada. Já uma *imagem em níveis de cinza* $f$ mapeia $E$ em $K_2 = \{0, 1, ..., 255\}$ e como visto na seção 2.3, $K_2$ também é uma cadeia limitada. Doravante, os mapeamentos de $E$ em $K$ serão chamados de *plano de informação*, pois podem estar representando uma imagem ou um conjunto nebuloso de $E$ em $\{0, ..., 255\}$. Cada par ordenado $\pi = (p, f(p))$, é chamado de "pixel", onde $p \in E$ é a posição do "pixel" e $f(p)$ é o seu nível de cinza.

A seguir é proposto um sistema especialista nebuloso cujas premissas das regras são explicitadas por composições de operadores da Morfologia Matemática. A maior contribuição deste trabalho é justamente o uso homogêneo da Morfologia Matemática e da Teoria dos Conjuntos Nebulosos na classificação de imagens. Procurando sanar alguns dos problemas apresentados pelo ICARE (ver Capítulo 3), o tratamento numérico é uniforme, em termos de valores de pertinências a conjuntos nebulosos. Essa abordagem facilita o entendimento desse sistema pelo usuário.

## 4.1. A Arquitetura do Sistema

Para classificar uma imagem é proposto nesse trabalho um conjunto de regras nebulosas *compiladas* em uma seqüência de operadores da Morfologia Matemática implementados na "toolbox" de Morfologia Matemática do ambiente de processamento de imagens KHOROS. Os operadores da Morfologia Matemática operam sobre a imagem e podem ser vistos como funções da lógica de primeira ordem (vide definição 9 do capítulo 2). A ativação das regras, utilizando-se a imagem $f$ como entrada, gera como resultado um conjunto de $n$ planos de informação $g_k : E \rightarrow [0,1]$, $k = 1, ..., n$, onde $g_k(p)$ corresponde ao grau de conformidade da posição $p$ com a classe $c_k$. A partir desses $n$ planos de informação nebulosa - um para cada classe possível - o sistema produz então uma classificação final para os "pixels".

O sistema é implementado utilizando-se dois níveis de abstração: 1) as regras fornecidas pelo(s) especialista(s) são traduzidas em seqüências de operadores da Morfologia Matemática e 2) os $n$ planos de informação $g_k$ gerados pelo disparo das seqüências no Khoros e gera como saída uma classificação para cada "pixel" da imagem. Embora essa concepção seja implementada no KHOROS, essa arquitetura pode ser adaptada para outros ambientes.

A arquitetura de sistema especialista proposta para classificação de imagens trata toda a imagem ao mesmo tempo. Porém, por simplicidade e sem perda de generalidade, será detalhado inicialmente como cada "pixel" é tratado. Seja então, um sistema especialista com regras que utilizam somente o conectivo E do tipo:

$$R_j : \text{Se } atr_1(p) = A_{1j} \text{ e ... e } atr_N(p) = A_{ij} \text{ então } classe(p) = B_j$$

onde $A_{ij}$ e $B_j$, $i = 1, ..., N_j$, $j = 1, ..., m$, são conjuntos nebulosos, $atr_i(p)$ são atributos do ponto $p$ na premissa e $classe(p)$ é o atributo do ponto $p$ na conclusão. O universo de discurso dos $B_j$ é dado por $C = \{c_1, ..., c_n\}$,onde cada $c_k \in C$ é uma das classes precisas possíveis. O universo de discurso de cada $A_{ij}$ depende do atributo $atr_i$ e não necessariamente é discreto.

A classificação de um ponto passa por três fases:

a) classificação do ponto em relação a cada regra;

b) agregação das classificações das regras em uma classificação global imprecisa;

c) determinação precisa da classe do ponto.

Na fase (a), a classificação do pixel em relação a regra $R_j$ obedece o seguinte esquema geral:

a.1) Verificação de compatibilidade do valor dos atributo $atr_i$ do ponto $p$ em relação ao conjunto nebuloso $A_{ij}$. Este grau de compatibilidade é dado por $h_{ij}(p) = \mu_{A_{ij}}(atr_i(p))$, que corresponde ao $h_{ij}$ do raciocínio aproximado (ver capítulo 2).

a.2) Verificação de compatibilidade geral dos valores dos atributos $atr_i$ do ponto $p$ em relação à premissa de cada regra $R_j$. Este grau de compatibilidade é dado por $h_j(p) = \top(h_{1j}(p), ..., h_{N_j m}(p))$ - ver capítulo 2.

OBS.: Se as regras utilizam somente o conectivo OU em lugar do conectivo E, $h_j(p)$ seria dado pela expressão $h_j(p) = \perp(h_{1j}(p), ..., h_{N_j m}(p))$, onde $\perp$ é uma t-conorma. Caso usem conectivos E e OU, $h_j(p)$ é calculado utilizando t-normas $\top$ e t-conormas $\perp$ convenientemente.

a.3) Inferência da classificação do "pixel", utilizando-se a compatibilidade da premissa, dada por $h_j(p)$ e pela conclusão da regra dada por $\mu_{B_j}$. Este valor é calculado para cada $p$ como o conjunto nebuloso $B'_{j(p)}$ definido em $C$, como

$$\mu_{B'_j(p)}(c_k) = \bigtriangledown(h_j(p), \mu_{B_j}(c_k)), \qquad j = 1, ..., m$$

onde $\bigtriangledown$ é uma função de implicação (vide capítulo 2). Cada $B'_{j(p)}$ representa a classificação nebulosa de $p$ em relação a regra $R_j$.

Na fase (b), os $B'_j$ são agregados em um único conjunto nebuloso $B'$, definido por

$$\mu_{B'(p)}(c_k) = \diamondsuit(\mu_{B'_{1(p)}}(c_k), ..., \mu_{B'_{m(p)}}(c_k)).$$

Se $\bigtriangledown$ é uma t-norma $\bigtriangledown_\top$, então a agregação $\diamondsuit$ é dada por uma t-conorma $\diamondsuit_\perp$.

Quando se aplica este raciocínio a imagem como um todo, criam-se $n$ planos de informação $g_k : E \longrightarrow \{0, ...255\}$; um para cada classe $c_k$ em $C$ que são tais que:

$$g_k(p) = \mu_{B'(p)}(c_k), k = 1, ..., n$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} g_k(p) &= \diamondsuit\left\{\mu_{B'_{1(p)}}(c_k), ..., \mu_{B'_{m(p)}}(c_k)\right\} \\ &= \diamondsuit\left\{\bigtriangledown\left[h_1(p), \mu_{B_1}(c_k), ..., h_j(p), \mu_{B_j}(c_k), ..., h_m(p), \mu_{B_m}(c_k)\right]\right\} \end{aligned}$$

Fazendo $m_{kj} = \mu_{B_j}(c_k)$, temos:

$$g_k(p) = \diamondsuit\left\{\bigtriangledown\left[h_1(p), m_{k1}\right], ..., \bigtriangledown\left[h_j(p), m_{kj}\right], ..., \bigtriangledown\left[h_m(p), m_{km}\right]\right\};$$

e fazendo $g_{kj}(p) = \bigtriangledown\left[h_j(p), m_{kj}\right]$, temos que

$$g_k(p) = \diamondsuit_{j=1,m}\ g_{kj}(p).$$

Quando $\bigtriangledown$ é uma t-norma $\bigtriangledown_\top$ e as conclusões são dadas por conjuntos nebulosos $B_j$ precisos, isto é, $\exists c^* \in C, \mu_{B_j}(c^*) = 1$ e $\forall c \neq c^*, \mu_{B_j}(c) = 0$ então para $c_k = c^*$ temos $m_{kj} = \mu_{B_j(p)}(c^*) = 1$ e $g_{kj}(p) = \bigtriangledown_\top(h_j(p), m_{kj}) = \bigtriangledown_\top(h_j(p), 1) = h_j(p)$ e para $c_k \neq c^*$ $g_{kj}(p) = \bigtriangledown_\top(h_j(p), 0) = 0$.

Portanto, para $c_k = c_j^*$ para a regra dada anteriormente, onde as premissas são conectadas por E, temos

$$g_{kj}(p) = \top_i \left[\mu_{A_{ij}}(atr_i(p))\right] \tag{4.1}$$

e consequentemente

$$g_k(p) = \diamondsuit_j \left\{\top_i \left[\mu_{A_{ij}}(atr_i(p))\right]\right\}. \tag{4.2}$$

Na Figura 4.1, pode-se observar o progresso do raciocínio quando a função de implicação é $\bigtriangledown = A \wedge B$. Sejam o evento $A$ definido por um intervalo de níveis de cinza e $B$ é uma a classe. Sejam ainda duas regras $R_1$ e $R_2$, tais que: $R_1$ :Se $f(x) \in A$=$[0, k_1]$ então $B$ é a classe $c_1$ e $R_2$ :Se $f(x) \in A$=$[k_1, k_2]$ então $B$ é a classe $c_2$. Supondo que os fatos sejam: $A_1' = k_{11} \in [0, k_1]$ e $A_2' = k_{12} \in [k_1, k_2]$ e dado que esses fatos são valores exatos, então usa-se o esquema de raciocínio inexato simplificado descrito no Capítulo 2. Para cada uma dessas regras, os resultados serão planos $\mu_{B_j'(p)}$ para cada classe, como descritos na Figura 2.1. Dado que as conclusões são dadas por conjuntos nebulosos precisos e supondo que a implicação resulte em planos $\mu_{B_j'(p)}$ de forma análoga àquela Figura, pode-se observar a alteração para os planos $g_{kj}(p)$.

Na fase (c), procede-se uma "desfuzzificação", onde atribui-se somente uma classe ao ponto. O resultado desta fase é a determinação da classificação final do ponto. Entre as opções disponíveis estão o método do centro de massa e da média dos máximos (Driankov et al., 1993). Porém, esses dois métodos não podem ser aplicados nesse trabalho, pois o domínio de $B$ não é uma escala contínua.

Uma alternativa para resolver esse problema consiste em classificar os pontos, não a uma só das classes originais, mas a algumas dessas classes. Seja a parte constituída de duas classes $c_{k_1}$ e $c_{k_2}$ denotada por $c_{\{k_1,k_2\}}$. Se por exemplo, para uma dada posição $p$ obtém-se $g_1(p) = g_2(p) = 1$ e $g_k(p) = 0$ para $2 < k \leq n$. Então é razoável classificar $p$ como pertencente à classe $c_{\{1,2\}}$. Nesse caso, $c_{\{1,2\}}$ será denominada *classe imprecisa*.

Para se obter classes disjuntas $c_k$, dois procedimentos são imediatos:

1) limiarizar cada plano de informação $g_k$ com um limiar $l_k$, fixado para a aplicação. Desta forma obtemos $n$ planos de informação binários $g_k'$. Então para uma dada posição $p$, a $classe(p) = c_k, k = \{k | g_k'(p) = 1\}$.

2) a classificação de $p$ será o conjunto de classes que obtiverem um grau maximal nos planos de informação $g_k$. Seja $u(p) = \max_{1 \leq k \leq n} g_k(p)$, o grau maximal

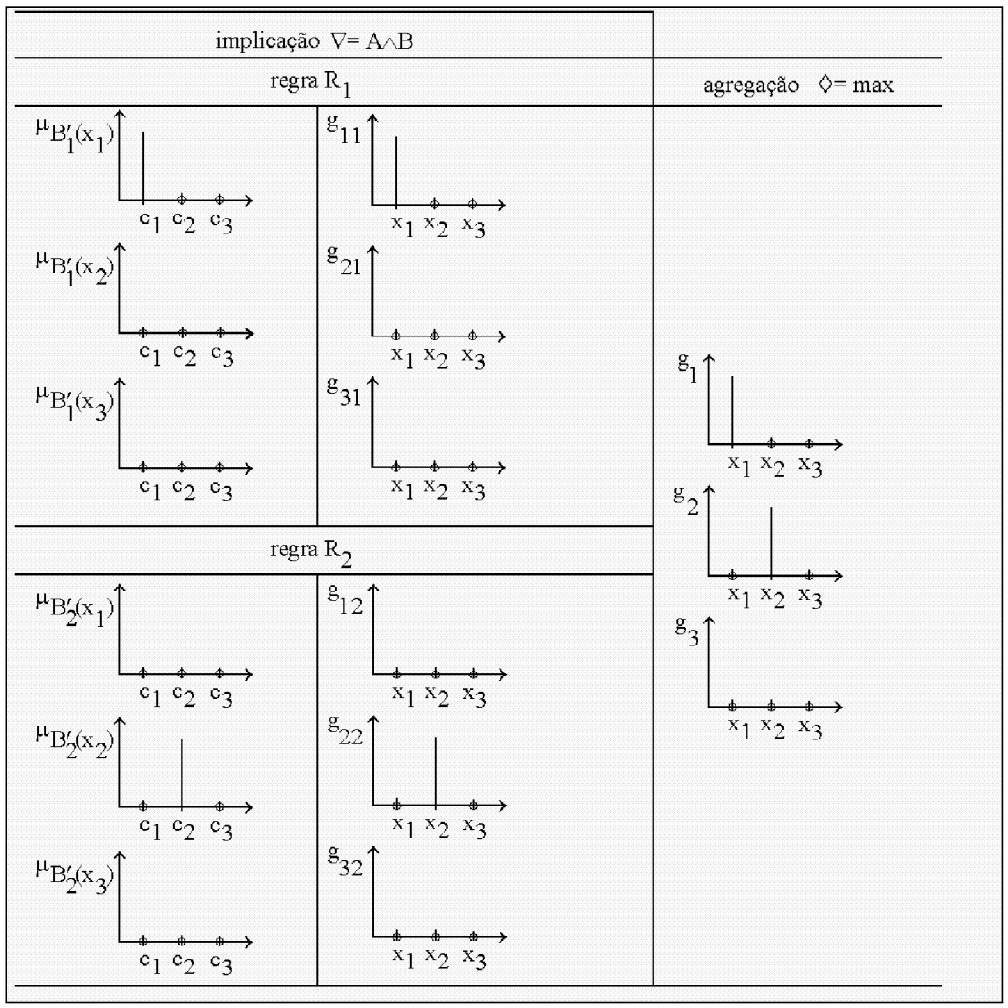


Fig. 4.1: Raciocínio nebuloso quando a implicação é $A \wedge B$ e a agregação é dada pelo max .

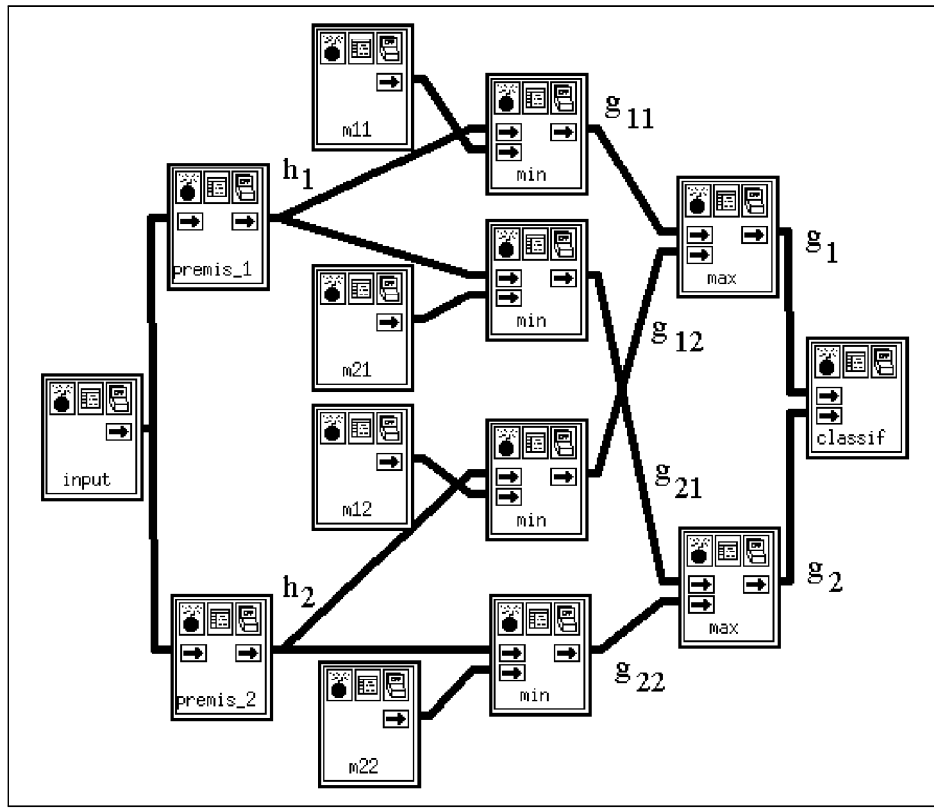


Fig. 4.2: Seqüência de operações no Khoros representando um sistema especialista, com $\bigtriangledown = \min$ e $\Diamond = \max$.

dos $g_k$, a classificação de $p$ será dada por $classe(p) = c_k, k = \{k|g_k(p) = u(p)\}$. Também nesse caso o resultado vem na forma de $n$ planos de informação binários $g'_k(p)$, onde $g'_k(p) = 1$, se $k$ pertence à classe de $p$ e 0 caso contrário. Esta alternativa é mais onerosa em termos de tempo de processamento do que a primeira.

**Exemplo**

Observando a arquitetura proposta como um todo, seja a aplicação dada pela Figura 4.2 e seja uma regra $R$ dessa aplicação dada por:

$R$ : *SE posição* $\in \widetilde{b_{mata}}$
*E posição* $\in \widetilde{perto_da_cidade}$
*ENTÃO classe* $= \widetilde{c_1}$.

onde: $\widetilde{b_{mata}}$ é um conjunto nebuloso com função de pertinência $\mu_{\widetilde{b_{mata}}} : E \longrightarrow$

$\{0, 255\}$, $\widetilde{perto_da_cidade}$ é um conjunto nebuloso com função de pertinência $\mu_{\widetilde{perto_da_cidade}} : E \longrightarrow [0, 255]$ e $\widetilde{c_i}$ é um conjunto nebuloso com função de pertinência $\mu_{\widetilde{c_i}} : C \longrightarrow [0, 255]$, onde $C = \{c_1, c_2\}$.

Na Figura 4.3 (Sandri et al., 1996) pode-se observar a seqüência de operações que tratam da aplicação da premissa da regra $R_1$ a uma imagem $f_1$, gerando as imagens $f_2$ a $f_5$. A caixa "Mata" (o mesmo raciocínio vale para a caixa "Cidade") processa a imagem de maneira a dar como saída uma imagem binária $E \rightarrow \{0, 255\}$, indicando se o "pixel" está localizado em área com nível de cinza indicador de "Mata" (respec. "Cidade"). Informações desse gênero podem ser obtidas através de um pré-processamento estatístico, seqüência de limiarizações ou ainda por cartas de um sistema geográfico de informações. Nesse caso especificamente, utilizou-se uma seqüência de limiarizações da Morfologia Matemática para a obtenção do atributo "Mata" (respec. "Cidade").

A caixa "Perto" é também uma seqüência de operações: primeiramente uma função distância é aplicada à imagem $f_3$, que demarca a cidade na imagem, gerando um plano de informação intermediário que forma "curvas de nível" em torno à cidade, tal como visto na Figura 2.6 com a distância aplicada fora da cidade. Verifica-se o grau de pertinência da distância de cada "pixel" em relação a um dado conjunto nebuloso "Perto", gerando a imagem $f_4$ que aponta os "pixels" perto da cidade.

As saídas das caixas "Mata" e "Perto" são pois mapeamentos de $E$ em {0,..., 255}, representando a conformidade dos valores dos atributos de cada "pixel" da imagem com valores *Mata* e *Perto_de_cidade* presentes na premissa da regra. Isso corresponde ao passo (a.1) da fase (a), onde $f_2(p)$ e $f_4(p)$ representam respectivamente $h_{11}(p)$ e $h_{12}(p)$. A caixa "min" implementa o conectivo E como a t-norma min e equivale ao passo (a.2) da fase (a), ou seja, $f_5(p)$ representa $h_1(p)$. Portanto, dada uma imagem mapeando de um retângulo $E$ em $\{0, ..., 255\}$, o resultado do processamento da premissa da regra $R_j$ é um mapeamento $h_j : E \rightarrow [0, 255]$.

Observando a arquitetura proposta como um todo, seja a aplicação dada pela Figura 4.2 que mostra um sistema especialista criado no Khoros com duas regras e $C = \{c_1, c_2\}$. As caixas "premis_1" e "premis_2", tratam as premissas de duas regras $R_1$ e $R_2$, respectivamente. A Figura 4.3 corresponde pois à caixa "premis_1" da Figura 4.2.

Seja a conclusão da regra $R_j$ dada por $\mu_{B_j}(c_k) = m_{kj}$, $m_{kj} \in \{0, ..., 255\}$. Essa abordagem consiste em utilizar uma caixa do Khoros para implementar a implicação de $h_j(p)$ em relação a cada $m_{kj}$, obtendo como resultado o mapeamento $g_{kj} : E \rightarrow \{0, ..., 255\}$, onde $g_{kj}(p) = \bigtriangledown(h_j(p), m_{kj}), p \in E$. Cada plano de informação $g_{kj}(p)$ representa a possibilidade de que a classe de $p$ seja $c_k$, levando-se em conta somente a regra $R_j$. Na aplicação considerada na Figura 4.2, o operador de implicação $\bigtriangledown$ utilizado é dado pelo operador min. Quando a conclusão é dada

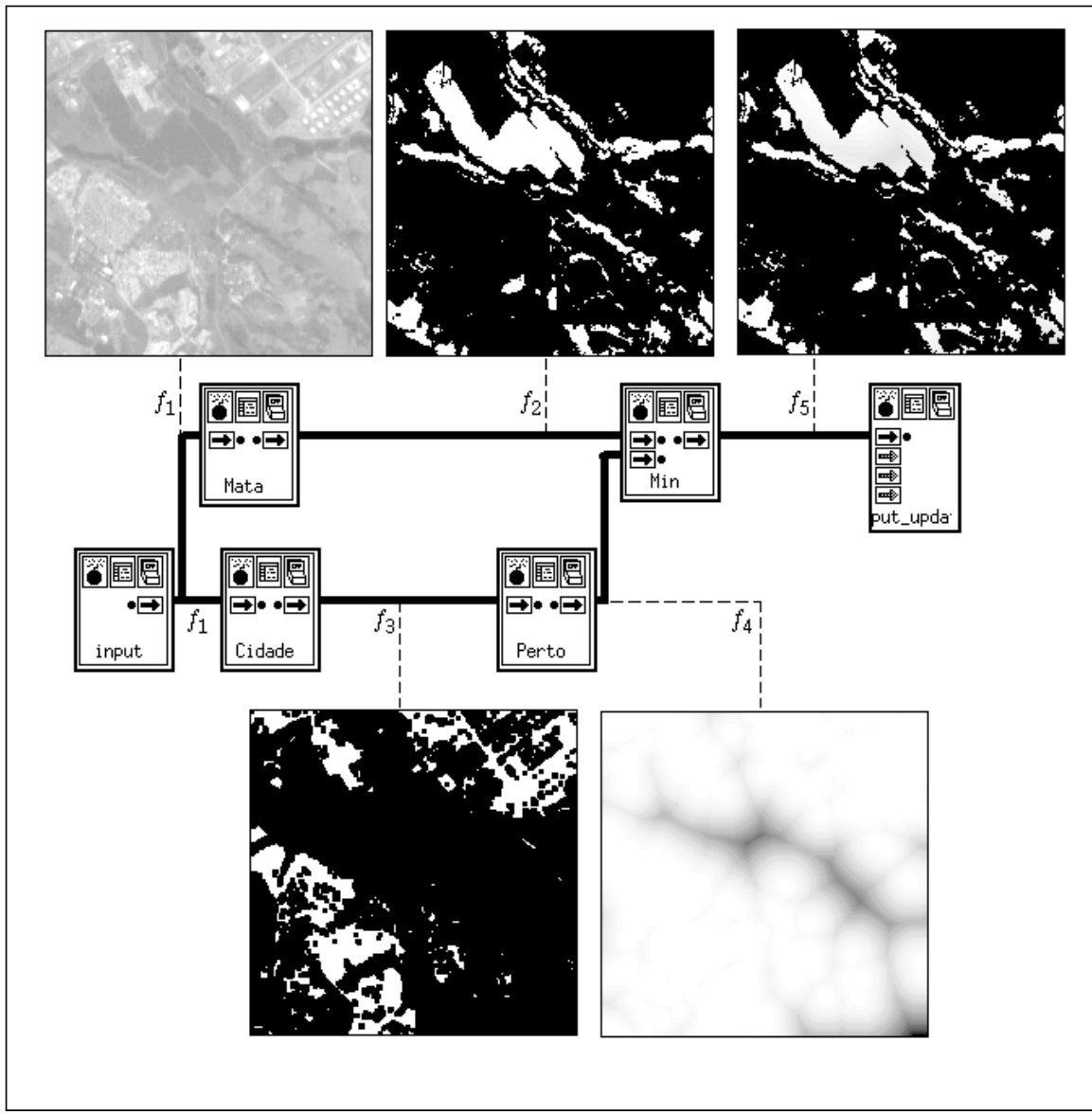


Fig. 4.3: Seqüência de operações do Khoros 1.0.5 sobre uma imagem.

por um conjunto nebuloso preciso, $g_{kj}(p) = h_j(p)$.

É importante notar que o conjunto nebuloso $B'_j(p)$ relativo a cada ponto $p$ tornou-se na verdade "implícito" nos planos de informação $g_{kj}$; para obtê-lo basta fazer $\mu_{B'_j(p)}(c_k) = g_{kj}(p)$.

Finalmente, os planos de informação $g_{kj}$ são agregados, utilizando um operador $\diamondsuit$, resultando em um conjunto de mapeamentos $g_k : E \rightarrow \{0, ..., 255\}$, onde $g_k(p) = \diamondsuit(g_{k1}(p), ..., g_{km}(p)), p \in E$. Cada plano de informação $g_k(p)$ representa a possibilidade de $p$ pertencer a classe $c_k$ levando-se em consideração todas as $m$ regras da base de conhecimento. Na aplicação da Figura 4.2, o operador de agregação $\diamondsuit$ utilizado é dado pelo operador max. É importante notar que o conjunto nebuloso $B'(p)$ relativo a cada ponto $p$ também está "implícito" nos planos de informação $g_k$; para obtê-lo basta fazer $\mu_{B'(p)}(c_k) = g_k(p)$.

Na seções seguintes esse assunto será tratado com maiores detalhes, mostrando como as regras utilizadas foram implementadas para a construção de um classificador, tomando como base a descrição dada acima.

## 4.2. Considerações para a Implementação Usando Morfologia Matemática

Para criar um sistema especialista nos moldes da seção anterior usando Morfologia Matemática, utiliza-se de regras. No entanto, pode haver problemas para a implementação de uma ou mais regras dadas pelo especialista. Por exemplo, o especialista pode definir uma classe utilizando-se de uma imagem colorida em composição RGB e o domínio do sistema trata de imagens em níveis de cinza. Em um caso desse tipo, pode haver uma "tradução" do conhecimento do especialista em uma ou mais regras compatíveis com o domínio do sistema.

Como foi visto no capítulo anterior, os operadores da Morfologia Matemática operam sobre a imagem e podem ser vistos como funções da lógica de primeira ordem. O principal papel desses operadores é a extração dos atributos da imagem para que o sistema especialista possa atuar. A operação principal para a extração dos atributos são as limiarizações da Morfologia Matemática. Porém, nem sempre é possível somente com elas extrair os atributos na sua melhor forma. Podem ocorrer casos onde há erro pela falta de pontos ou pelo seu excesso. Quando isso ocorre, a operação de reconstrução resolve a maioria dos casos, com algum processamento auxiliar, como erosões, filtragem, dilatações, etc.

Em casos onde a limiarização resulta em áreas bem definidas, mas com alguns pontos isolados indesejáveis, o operador sup-gerador pode extrair esses pontos isolados sem afetar as demais áreas presentes na imagem, sem a necessidade da reconstrução.

A partir da função distância da Morfologia Matemática pode-se implementar características nebulosas como perto, muito perto, nas proximidades, longe, muito longe, etc. Essas implementações podem se dar a partir de uma função da função distância; seja criando os graus de pertinência para o conjunto nebuloso desejado ou com limiarizações.

### 4.2.1. A Modelagem das Regras

Como mencionada anteriormente, os operadores da Morfologia Matemática podem ser vistos como funções da lógica de primeira ordem. O procedimento de como uma regra pode ser modelada utilizando operadores da Morfologia Matemática, é mostrado a seguir. Deve-se ressaltar que essa modelagem não é única, devido ao fato de que pode-se variar a função de implicação, bem como a t-norma e a t-conorma utilizadas. Doravante, um conjunto nebuloso será denotado por $\widetilde{conjunto_nebuloso}$ e sua função de pertinência por $\mu_{\widetilde{conjunto_nebuloso}}$.

Deve-se chamar a atenção para o fato que o contradomínio das funções de pertinências nos conjuntos nebulosos é o intervalo [0,1]. Por questão de eficiência, as imagens trabalhadas são imagens com valores inteiros no conjunto {0,...,255} e não com valores reais naquele intervalo.

A seguir, será exemplificado como as regras podem ser implementadas usando operadores da Morfologia Matemática. Cinco fragmentos de conhecimento serão tratados, mostrando detalhadamente os passos da transformação da regra explicitada pelo especialista em uma sequência de operadores da Morfologia Matemática representando conjuntos nebulosos.

Supondo que um fragmento do conhecimento dado pelo especialista seja dado pela regra:

$R_1$ : *SE radiometria na banda* 4 = $\widetilde{aproximadamente_entre}$_0_*e*_13
*E radiometria na banda* 5 = $\widetilde{aproximadamente_entre}$_0_*e*_10
*ENTÃO posição* $\in \widetilde{b_{rio}}$

onde: $\widetilde{aproximadamente_entre}$_0_*e*_13 é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{[0,13]}} : \{0, ..., 255\} \longrightarrow \{0, 255\}$ é dada por:

$$\mu_{\widetilde{[0,13]}}(s) = \begin{cases} 255, & \text{se } s \leq 13 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ;$$

$\widetilde{aproximadamente_entre}$_0_*e*_10 é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{[0,10]}}$ é:

$$\mu_{\widetilde{[0,10]}}(s) = \begin{cases} 255, & \text{se } s \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ;$$

$\widetilde{b_{rio}}$ é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{b_{rio}}} : Y = \{sim, não\} \longrightarrow \{0, 255\}$ é:

$$\mu_{\widetilde{b_{rio}}}(y) = \begin{cases} 255, & \text{se } y = \text{sim} \\ 0, & \text{se } y = \text{não} \end{cases} .$$

Deve-se observar que as proposições $X = A$ e $X \in A$ têm aqui o mesmo significado e só aparecem de forma diferenciada para facilitar a leitura. Deve-se salientar também que usa-se uma nomenclatura nebulosa, apesar das definições das funções reportarem um sentido não-nebuloso. Isso apenas enfatiza que conjuntos nebulosos também poderiam ser utilizados nesse ponto.

As funções $\mu_{\widetilde{[0,13]}}$ e $\mu_{\widetilde{[0,10]}}$ são LUTs de operadores de limiarização que aplicadas a uma imagem em níveis de cinza (nesse caso, respectivamente bandas 4 e 5) resultam em imagens binárias.

Pela arquitetura proposta, a implementação da regra $R_1$, sendo que a conclusão é um conjunto nebuloso preciso, a implicação $\bigtriangledown = \min$, a agregação $\diamondsuit = \max$, e $\mu_{\widetilde{[0,13]}}$ e $\mu_{\widetilde{[0,10]}}$ são LUTs de operadores de limiarização, pelas Equações 4.1 e 4.2 resultará em uma imagem $g_{b_{rio}}(x)$, onde:

$$g_{b_{rio}}(x) = \min\left[\left(\mu_{\widetilde{[0,13]}}(f_4(x)), \mu_{\widetilde{[0,10]}}(f_5(x))\right)\right]$$

Como as funções de pertinência $\mu_{\widetilde{[0,13]}}$ e $\mu_{\widetilde{[0,10]}}$ são aplicadas a radiometria e não a uma imagem, para que seja aplicada uma imagem, faz-se uma composição: $\mu_{\widetilde{[0,13]}}(f_4(x)) \triangleq \mu_{\widetilde{[0,13]}}(x) \circ f_4(x)$ e $\mu_{\widetilde{[0,10]}}(f_5(x)) \triangleq \mu_{\widetilde{[0,10]}}(x) \circ f_5(x)$. Então:

$$g_{b_{rio}}(x) \triangleq \min\left[\left(\mu_{\widetilde{[0,13]}}(x) \circ f_4(x), \mu_{\widetilde{[0,10]}}(x) \circ f_5(x)\right)\right]$$

Em termos de operadores da Morfologia Matemática, as composições $\mu_{\widetilde{[0,13]}}(x) \circ f_4(x)$ e $\mu_{\widetilde{[0,10]}}(x) \circ f_5(x)$ são operadores de limiarização. Então:

$$g_{b_{rio}}(x) \triangleq \min\left(\text{limiarização}_{[0,13]}(f_4)(x), \text{limiarização}_{[0,10]}(f_5)(x)\right) .$$

Note-se que o min que aparece na equaçào acima se refere a T-norma que implementa o conectivo E.

A seguir será mostrado de forma mais suscinta a modelagem de uma segunda regra. Supondo que um segundo fragmento do conhecimento dado pelo especialista seja dado pela regra $R_2$:

$$\begin{aligned} R_2 : & \textit{ SE posição} \in \widetilde{\textit{muito_perto_do_rio}} \\ & \quad \textit{E posição} \in \neg\widetilde{b_{rio}} \\ & \textit{ENTÃO posição} \in \widetilde{b_{\mathrm{margem_do_rio}}} \end{aligned}$$

onde: $\widetilde{\textit{muito_perto_do_rio}}$ é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{\textit{muito_perto_do_rio}}} : E \longrightarrow \{0, 255\}$ é aqui definida em termos da função distância $\Psi_d(f)(x)$, do capítulo 2, e é dada por:

$$\mu_{\widetilde{\textit{muito_perto_do_rio}}} = \text{limiarização}_{[0,10]}\ \Psi_d(g_{b_{rio}});$$

$\neg\widetilde{b_{rio}}$ é o complemento do conjunto nebuloso $\widetilde{b_{rio}}$ e é dado por:

$$\mu_{\neg\widetilde{b_{rio}}} = 255 - \mu_{\widetilde{b_{rio}}};$$

$\widetilde{b_{\mathrm{margem_do_rio}}}$ é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{b_{\mathrm{margem_do_rio}}}} : Y = \{\textit{sim}, \textit{não}\} \longrightarrow \{0, 255\}$ é:

$$\mu_{\widetilde{b_{\mathrm{margem_do_rio}}}}(y) = \begin{cases} 255, & \text{se } y = \text{sim} \\ 0, & \text{se } y = \text{não} \end{cases}.$$

Pela arquitetura proposta, a implementação da regra $R_2$, sendo que a conclusão é um conjunto nebuloso preciso, a implicação $\bigtriangledown = \min$, pelas Equações 4.1 e 4.2 resultará em uma imagem $g_{\mathrm{margem_do_rio}}$, dada por:

$$g_{\mathrm{margem_do_rio}} = \min\left[\left(\mu_{\widetilde{\textit{muito_perto_do_rio}}}, f_{255} - g_{b_{rio}}\right)\right]$$

onde $f_{255}$ é uma imagem branca, isto é, $\forall x \in E, f_{255}(x) = 255$.

Em termos de operadores da Morfologia Matemática, a função de pertinência de $\widetilde{\textit{muito_perto_do_rio}}$ é um operador de limiarização sobre a função distância. Então:

$$g_{\mathrm{margem_do_rio}} \triangleq \min\left(\text{limiarização}_{[0,10]}(\Psi_d(g_{b_{rio}})), f_{255} - g_{b_{rio}}\right)$$

Seja $C = \{c_{rio}, c_{floresta}, c_{\textit{área_antropizada}}\}$ o conjunto de classes relevantes a uma dada aplicação. Para a classe $c_{rio}$, uma regra adicional $R_3$ relaciona o conjunto nebuloso $\widetilde{c_{rio}}$ com o conjunto nebuloso $\widetilde{b_{rio}}$ obtido anteriormente:

$R_3$ : *SE posição* $\in \widetilde{b_{rio}}$
*ENTÃO classe* $= \widetilde{c_{rio}}$

onde $\widetilde{c_{rio}}$ é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{c_{rio}}} : C \longrightarrow \{0, 255\}$ é:

$$\mu_{\widetilde{c_{rio}}}(c) = \begin{cases} 255, & \text{se } c = c_{rio} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Pela arquitetura proposta, a implementação da regra $R_3$, sendo que a conclusão é um conjunto nebuloso preciso, a implicação $\bigtriangledown = \min$, pelas Equações 4.1 e 4.2 resultará em uma imagem $g_{c_{rio}}$, onde:

$$g_{c_{rio}}(x) = \mu_{\widetilde{c_{rio}}'(x)}(c_{rio}).$$

Seja o conjunto nebuloso dado pela descrição "componente conexa do conjunto das posições dos "pixels" com radiometria aproximada entre 70 e 200 na banda 3, que contém pelo menos uma área quadrada de 270 m$^2$", denotado por $\widetilde{componente_conexa_1}$. Então $\widetilde{componente_conexa_1}$ é uma área da imagem, cujos níveis de cinza pertencem a um intervalo e que possuem uma área superior a uma área definida. Uma regra $R_4$ poderia ser da forma:

$R_4$ : *SE posição* $\in \widetilde{componente_conexa_1}$
*ENTÃO posição* $\in \widetilde{b_{área_antropizada}}$

onde: $\widetilde{componente_conexa_1}$ é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{componente_conexa_1}} : E \longrightarrow \{0, 255\}$ é definida em termos da abertura por reconstrução $\gamma_m(f)(x)$, do capítulo 2, onde $m$ é um marcador, e é dada por:

$$\mu_{\widetilde{componente_conexa_1}} = \gamma_{\varepsilon(\text{limiarização}_{[70,200]}f_3)}(\text{limiarização}_{[70,200]}f_3);$$

onde: $\widetilde{b_{área_antropizada}}$ é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{b_{área_antropizada}}} : Y = \{sim, não\} \longrightarrow \{0, 255\}$ é:

$$\mu_{\widetilde{b_{área_antropizada}}}(y) = \begin{cases} 255, & \text{se } y = \text{sim} \\ 0, & \text{se } y = \text{não} \end{cases}.$$

Pela arquitetura proposta, a implementação da regra $R_2$, sendo que a conclusão é um conjunto nebuloso preciso, a implicação $\bigtriangledown = \min$, pelas Equações 4.1 e 4.2 resultará em uma imagem $g_{b_{área_antropizada}}$, onde:

$$g_{b_{área_antropizada}} = \mu_{\widetilde{componente_conexa_1}}$$

Em termos de operadores da Morfologia Matemática, a função de pertinência de $\widetilde{componente_conexa_1}$ é o operador de reconstrução do conjunto das posições dos "pixels" com radiometria aproximada entre 70 e 200 na banda 3 marcado pelo conjunto das posições dos "pixels" com radiometria aproximada entre 70 e 200 na banda 3 que contém pelo menos uma área quadrada de 270 m$^2$. Então:

$$g_{b_{área_antropizada}} \triangleq \gamma_{\varepsilon(\text{limiarização}_{[70,200]}f_3)}(\text{limiarização}_{[70,200]}f_3)$$

Seja o conjunto nebuloso dado pela descrição "ao norte da área antropizada", denotado por $\widetilde{área_norte}$. Então $\widetilde{área_norte}$ é uma área da imagem, que depende de uma área já definida anteriormente e que possui uma posição geograficamente definida. Uma quinta regra poderia ser dada por:

$R_5$ : *SE posição* $\in \widetilde{área_norte}$
*E posição* $\in \widetilde{b_{margem_do_rio}}$
*ENTÃO posição* $\in \widetilde{b_{floresta}}$

onde: $\widetilde{área_norte}$ é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{área_norte}} : E \longrightarrow \{0, 255\}$ é definida em termos de uma N-dilatação que é uma sucessão de N dilatações por um elemento estruturante $EE$. Para que a posição "norte" seja a resultante, a dilatação deverá ter por elemento estruturante:

$$EE = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e a N-dilatação é denotada por $\delta^N_{EE}(f)$. A função de pertinência de $\widetilde{área_norte}$ é dada por:

$$\mu_{\widetilde{área_norte}} = \delta^N_{EE}(g_{b_{área_antropizada}});$$

onde: $\widetilde{b_{margem_do_rio}}$ é um conjunto nebuloso já definido anteriormente e $\widetilde{b_{floresta}}$ é um conjunto nebuloso cuja função de pertinência $\mu_{\widetilde{b_{floresta}}} : Y = \{sim, não\} \longrightarrow \{0, 255\}$ é:

$$\mu_{\widetilde{b_{floresta}}}(y) = \begin{cases} 255, & \text{se } y = \text{sim} \\ 0, & \text{se } y = \text{não} \end{cases}.$$

Pela arquitetura proposta, a implementação da regra $R_5$, sendo que a conclusão é um conjunto nebuloso preciso, a implicação $\bigtriangledown = \min$, pelas Equações 4.1 e 4.2 resultará em uma imagem $g_{b_{floresta}}$, onde:

$$g_{b_{floresta}}(x) = \min\left(\mu_{\widetilde{área_norte}}(x), \mu_{b_{m\,\widetilde{\arg em_do_rio}}(x)}(sim)\right)$$

Pelas definições anteriores das funções de pertinência de $\widetilde{área_norte}$ e $b_{m\,\widetilde{\arg em_do_rio}}$, temos:

$$g_{b_{floresta}} \triangleq \min\left(\delta^{N}_{EE}(g_{b_{\widetilde{área_antropizada}}}), g_{\widetilde{m\,\arg em_do_rio}}\right).$$

No Capítulo 5 será visto uma aplicação completa usando esta arquitetura.